

工学部のための力学入門 I

藤崎弘士^{*1}

2019 年 4 月 7 日

^{*1} 日本医科大学 医学部 物理学教室, fujisaki@nms.ac.jp

目次

第 1 章	古典力学の基礎	5
1.1	古典力学とは何か	5
1.2	座標系	6
1.3	速度、加速度ベクトル	9
1.4	ニュートンの法則	11
1.5	ニュートン方程式の解き方	13
第 2 章	エネルギーの性質	39
2.1	エネルギーとは何か	39
2.2	1次元の場合のエネルギー	40
2.3	2次元以上の場合のエネルギー	42
2.4	保存力	46
2.5	仕事	49
第 3 章	単位について	51

第 1 章

古典力学の基礎

1.1 古典力学とは何か

古典力学 (classical mechanics) とは 17 世紀にニュートンによって確立された、物体の運動に関する法則の体系であり、大雑把に言えばニュートンの運動方程式とその周辺に関する学問である。ニュートンの方程式は 20 世紀に入ってから相対論と量子論によって修正 (概念的には根本的な変革) を受けたが、だからと言って「古い、いい加減な理論」ということはなく、その成立する範囲は非常に広い。例えば、生体内の分子の運動を記述するのは (水素などの軽い原子を除き)、ニュートンの方程式であるし、銀河系の形成を計算するための基礎もニュートンの方程式である。ニュートン方程式が使えない状況は、(a) 粒子の速度が非常に速い場合 (相対論が必要)、(b) 電子ほどの非常に軽い粒子の運動を考える場合 (量子論が必要) などであり、通常われわれに「見える」ような状況ではニュートン方程式は非常によい精度で成り立つと考えてよい。

また、後で述べるように、エネルギーという普遍的な概念が最初に出てくるのも古典力学であるし、物事を粗視化して流体力学などを導く際の基礎となるのも古典力学である。概念的 (哲学的) には、ニュートン方程式は微分方程式であるので、初期値 (初期状態) を決めればその後の一切が

決まるという形式になっており、これは決定論的な世界観 (**deterministic perspective**) につながる。(これは量子論、統計力学などの確率的な世界観とは対照的である。) よって、古典力学は非常に古い物理学ではあるが、その重要性は現在でも全く失われていない。また、古典力学の範囲内でも解かれていない問題は非常に多く、現在でもホットな研究対象である。

本章では、古典力学のベーシックな話題を分かりやすく解説する。座標や速度ベクトルなどの話などから始めて、ニュートン方程式や力についての議論を行い、その後はニュートン方程式の解き方を簡単な系（一定の力がかかっている系）から順を追って強制振動まで解説する。その後、力学で重要となるエネルギー、運動量の概念を導入し、それらの保存則や位置エネルギーの計算の仕方（線積分の仕方）について説明する。ここまでを理解することが古典力学のミニマムと言ってよいだろう。それから回転を議論するためのトルク（力のモーメント）と角運動量の概念を導入し、それらの間の関係について説明する。これを使って、2つの粒子が相互作用している2体問題について議論する。逆2乗の力で相互作用する場合（いわゆるケプラー問題）についてやや詳しく述べる。3体以上の系では運動は複雑になり、解析的に解けない場合がほとんどであるが、N体系（質点系）の一般的な性質について解説する。これはその後、剛体系を議論するための準備としてである。この章の最後では剛体の回転について説明する。ただし、複雑さを減らすために2次元での回転のみに議論を限定する。

1.2 座標系

古典力学は質点 (**point particle**) の運動に関する法則を集めたものである。質点とは物体を抽象化してとらえた概念で、それは質量 (**mass**) という重さに対応する量（後述）のみをもち、それ以外は点として表されるようなものである。質量を m とすると、その点の座標（位置ベクトル）は3次元

空間においては、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

と書かれる。これは一見、極端な理想化のように思えるかもしれないが、例えば太陽の周りの地球の動きを考える場合であれば、地球の半径は太陽と地球の間の距離に比べて非常に小さいので、よい近似となっている。ただし、アメーバの運動を考えるときは、アメーバの大きさとその移動距離は同じくらいの量なので、アメーバを1つの質点とみなすのはあまりよい近似ではない。

問

地球の大きさと太陽の大きさを、太陽と地球の間の距離からの比として求めよ。

ただし、ここでベクトル \mathbf{r} に関しては注意が必要である。というのも、どのような座標系 (**coordinate system**) をとるかということが明示されていないからである。常識的には、このように書いたときは、デカルト座標 (**Cartesian coordinate**) が仮定されている。図 1.2 のように3次元の空間を考えたときに、 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ というベクトルを定義すると（これらはそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである）位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.2.2)$$

と書ける。ここで上のベクトル（基本ベクトルと呼ばれる）には以下の性質がある。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.2.3)$$

この性質を満たすものを正規直交座標 (**orthogonal coordinate**) と言う。ここでドットはベクトルの内積を表し、 δ_{ij} は $i = j$ のときだけ1となり、それ以外は0となる関数である。

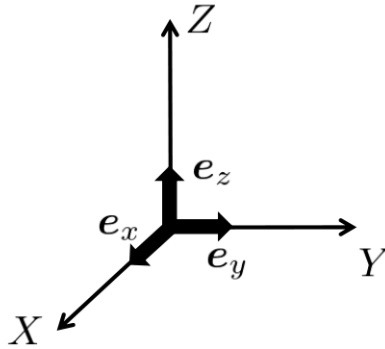


図 1.1 3次元空間のデカルト座標とその基本ベクトル。

通常はこのデカルト座標を使う（暗に仮定する）ことが多いが、他に使われることの多い座標系として、極座標 (**polar coordinate**) 系がある。これは球形の地球上の位置を指定するのに、経度と緯度を用いるが、それと同じものである。ここでは簡単のために2次元空間での極座標 (r, θ) を考えると図??のようになる。ここで、基本ベクトルを r 方向のもの e_r と、それに直交する θ 方向のもの e_θ として定義しよう。すると、ある位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (1.2.4)$$

と書ける（各自考えてみよ）。この座標系のありがたみは、後で回転運動を考えると分かる（後述）。

最後に、2次元のデカルト座標と極座標の関係についてまとめておこう。図??からも容易に分かるように、

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (1.2.5)$$

という関係がある。それぞれの座標系の基本ベクトルに関しても以下のような関係があることが分かる。

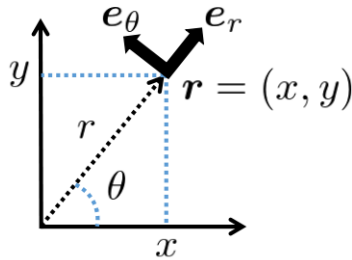


図 1.2 2次元空間の極座標とその基本ベクトル。

— 問い —

以下の関係を示せ。

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (1.2.7)$$

また、 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ が正規直交系であることから、 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ が正規直交系であることを示せ。

1.3 速度、加速度ベクトル

質点は座標系の中を動き回るが、どこにいつ (**when**) いるかを指定するパラメータが時間 (**time**) である。それを t と書くと、座標ベクトルは

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

となる。以下では簡単のため、2次元の運動のみを考える。ある時刻 t_0 でものが動き出したとして、それが時刻 t まで動くと、1次元的な跡ができる。これを軌道 (**trajectory**) と呼ぶ (図*)。

軌道は t の連続的な関数とみなせる場合、微分可能である。よって、以下の量を定義してもよい。

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (1.3.2)$$

これを速度 (**velocity**) ベクトル $\mathbf{v}(t)$ と呼ぶ。これは図 1.3 からも分かるように、ちょうど $\mathbf{r}(t)$ における接線方向のベクトルである。また、上の最右辺のように、時間に関する微分を上付きのドットで表すことも多いので慣れてもらいたい。

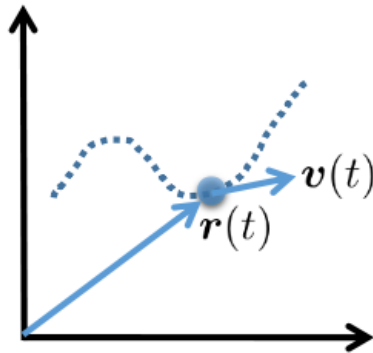


図 1.3 位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ と速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ の関係。

速度ベクトルが定義されると、それをもう 1 回微分することで、加速度 (**acceleration**) ベクトル $\mathbf{a}(t)$ が定義できる。

$$\mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (1.3.3)$$

これは速度の大きさか、方向が変化する量を表している。最右辺の、上付き

の2つのドットは、時間に関する2階微分を表す。

さて、ここで座標系を変えたときに、速度や加速度ベクトルがどうなるかを見てみよう。デカルト座標のときは、その基本ベクトルは x, y 軸であり、これは固定しているので、時間とともに変化したりはしない。よって、

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y, \quad (1.3.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y \quad (1.3.5)$$

となるだけである。一方、極座標の場合は、その基本ベクトルは θ の関数であり（式 (1.2.6), (1.2.7) を見よ）、これは時間とともに変化するので、基本ベクトルも時間とともに変化することになる。よって、式 (1.2.6), (1.2.7) を使うと、以下のようなになる。

— 問い —

極座標で表したときの速度、加速度ベクトルが以下のようなことを示せ。

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (1.3.6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (1.3.7)$$

1.4 ニュートンの法則

ニュートンの法則は古典力学のもっとも基本的な法則であり、質点の運動に関する法則である。まずそれらの法則について以下で説明する。

- 慣性の法則：これは力がかかっていないときに、質点がどうなっているか述べたものである。答えは、静止しているか、一定の速度ベクトルで運動している*1。
- 運動の法則：これは力がかかっているときに、質点がどう運動するか数学的に述べたものである。答えは、加速度ベクトルは力のベクトル

*1 力がかかっていない近似的な状況としては、たとえば無重力状態を考えることができる。

に比例する。

$$\mathbf{a} \propto \mathbf{F} \quad (1.4.1)$$

ここで力 (**force**) という概念が出てきたが、ここではナイーブに手で押したり引いたりする力を一般化したものと考えればよい。ただし、それはベクトルであり、ベクトルの性質を満たすものとする*2。例えば、バネばかりで測られるようなバネの力（後述）を使って、なめらかな面上で物体を運動させると、上の関係式が成り立つことが分かる。よって、これは実験事実である。

ここで比例しているということは比例係数があるということだが、それを $1/m$ と書くと、この法則は

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F} \quad (1.4.2)$$

という等式で書ける。ここで導入された量 m が、**質量 (mass)** であり、これは同じ力をかけたときに、動きやすいかどうかを表す量である。これが大きいものは加速度も小さいので動きにくい。これはわれわれが直感的に「重さ」と言っているものと似た量である*3。

- 作用・反作用の法則：この法則は質点が2つある場合の法則である。その場合、質点間に力が働くことが考えられるが、それらの力について述べたものであり、式で書くと、

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (1.4.4)$$

となる。ただし、 \mathbf{F}_{ij} は質点 j から質点 i に働く力である。ここで重要なのは、 \mathbf{F}_{ij} と書いたものは、**内力 (internal force)** と言われる

*2 例えば、2つの力が同時にある質点に作用する場合は、それらのベクトルを足したものが正味の力のベクトルになる。

*3 正確に言うと、われわれが重さと呼んでいるのは、地球の重力加速度 g のもとでの力であり、それは

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \quad (1.4.3)$$

のことである（後述）。

ものであり、質点間でのみ力が働いている状況を考えているということである*4。作用・反作用の法則は、非常に自然に思えるが、質点が2つのみという理想化された状況での仮説であることに注意。

1.5 ニュートン方程式の解き方

1.5.1 ニュートン方程式を解くというのはどういうことか

ニュートン方程式をもう一度書くと

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.5.1)$$

となるが、これは2階の微分方程式である。一般に高階の微分方程式は解き難いので、これを以下の1階の微分方程式に変形する。

問

以下がニュートン方程式と等価なことを示せ。

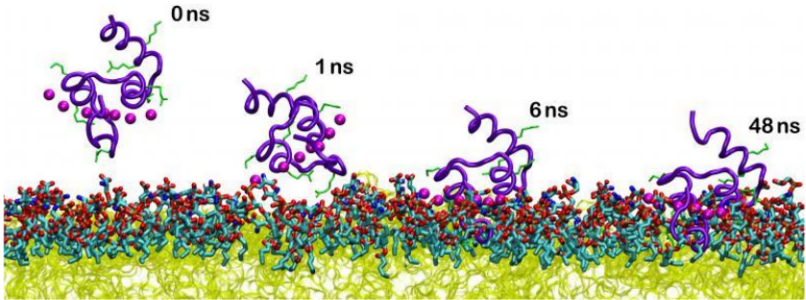
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}, \quad (1.5.2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1.5.3)$$

さて、この式は初期の位置と速度 ($\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0)$) を決めると、任意の時刻の状態 ($\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$) が一意に定まることが知られている。これは解析的に（手で）得られる場合もあるし、コンピュータを使って求めることもあるが、とにかく時間の関数として位置と速度を求めることを、ニュートン方程式を解くと言う。また、いまは簡単のために、 \mathbf{r} を1つの質点を表す、2次元や3次元のベクトルと考えているが、質点系の節で述べるように、 \mathbf{r} は多粒子の座標を表していると考えてもよい。その場合は、右辺の力も多粒子に働く

*4 内力に対して、外力と呼ばれる力もあり、この場合は、考えている2つの質点以外に力を生み出す源がある（後述）。

力と解釈することになる。図 1.4 にあるように、タンパク質などの運動はニュートン方程式を解くことから現在は得ることができる。よって、この考えを推し進めていけば、細胞全体のニュートン方程式を解けば細胞のことが分かるし、人間や世界全体も原子分子（質点）の集まりなので、ニュートン方程式で原理的には全て分かることになる。これを決定論的な世界観という。というのも、初期の状態を定めれば、その後の状態が完全にわかってしまうからである。



© Emad Tajkhorshid

図 1.4 膜タンパク質をニュートン方程式を使って解いた例。

問い

決定論的な世界観は本当に正しいかどうか、議論してみよ。

さて、より実際的な話に移ろう。後で述べるように、複雑な状況ではニュートン方程式を解くためにはコンピュータを使った数値計算に頼るほかないが、簡単な状況では手で解ける。そのためのステップは

- どんな力がかかっているかをもれなく見つける*5。
- ニュートン方程式を立てる。
- 初期状態を決める。
- 微分方程式を解く。

となり、最初の3つが物理的なステップであり、最後の一つは数学的なステップである。ここでは主に最後のステップについて説明する。

以下では順を追って簡単な力の場合から複雑な力の場合について解法を述べる。残念ながら統一的な解法は（数値解法を除いて）ない。それぞれ微分方程式の形に応じて別個の解法があるので、それぞれを別個のものとして理解してもらいたい。

1.5.2 一定の力が働く場合

これからニュートン方程式を解いていくが、まずはもっとも簡単な場合、つまり、力ベクトルが一定の場合を考えよう。例えば、地球上の重力 (**gravity**) は一定の力ベクトル（鉛直下向き）と見なすことができる。また、もっと重要なことは、短時間であれば、どんな力も一定であると見なせることである。よって、短時間の運動であれば、一定の力の場合と見なして解くことができる。これはコンピュータでニュートン方程式を解く際に基礎となる考え方である。

\mathbf{F} が一定ということで、それを \mathbf{F}_0 と置こう。ここでは式 (1.5.1) ではなく、式 (1.5.2) と (1.5.3) を用いよう。式 (1.5.2) の右辺は定数ベクトルだから、これは簡単に積分できて、

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \frac{\mathbf{F}_0}{m}t \quad (1.5.4)$$

*5 もれなく見つけるというのが結構難しい！

となる。これを式 (1.5.3) の右辺に入れて、もう一度積分すると、

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{\mathbf{F}_0}{2m}t^2 \quad (1.5.5)$$

となる。よって、位置と速度が時刻 t の関数として求まったことになるので、これはニュートン方程式を解いたことになる。ここで、 $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ はそれぞれ位置と速度の初期の値であり、これを初期状態 (**initial state**) もしくは初期条件 (**initial condition**) と呼ぶ。

例えば、運動を2次元に制限して考え、力として重力を考えると、

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (1.5.6)$$

であるので、初期状態として

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} \quad (1.5.7)$$

を選ぶと、

$$x(t) = v_{0x}t, \quad (1.5.8)$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \quad (1.5.9)$$

となる。

問

この運動が放物線運動であることを示せ。

1.5.3 速度に比例する抵抗をうける運動

上で考えた重力下の運動を、水の入った試験管の中で考えてみよう。これは化学などの実験でありふれた状況である。その場合は力は重力だけでなく、水からの**摩擦力 (frictional force)** が働く (図 1.5)。それは経験的に速度に比例することが知られており、

$$\mathbf{F}_f = -\gamma m \mathbf{v} \quad (1.5.10)$$

と表せる。ここで m は質量、 γ は摩擦係数と呼ばれる量であり、摩擦の強さを表す。

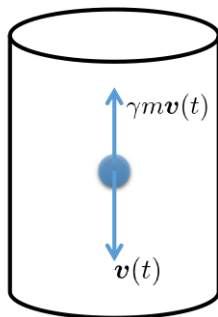


図 1.5 試験管中の粒子に対する摩擦力。

下向きに x 座標をとり、運動は 1 次元のみにしか起こらないと仮定してニュートンの方程式を立てると、

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma m v \quad (1.5.11)$$

となる。ここでのポイントは、式 (1.5.2) を使ったということである。これはどうしてかということ、右辺が v のみの関数になっているからである。初期状態として、 $x(0) = 0, v(0) = 0$ をとろう。

後はこの微分方程式を解けばよいのだが、これは一定の力の場合のように単純に右辺を積分しても解けない*6。そこで、まず、

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma \left(v - \frac{g}{\gamma} \right) \quad (1.5.12)$$

*6 左辺から $v(t)$ がもともたがるが、右辺には速度の積分がでてきてしまうので、うまくいかない。

という風に変形しよう。ここで

$$V = v - \frac{g}{\gamma} \quad (1.5.13)$$

という新しい変数を導入する。すると、ニュートンの方程式は

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma V \quad (1.5.14)$$

となる。これを両辺を V で割って、時間で積分すると、

$$\int_0^t \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} dt = -\gamma \int_0^t dt \quad (1.5.15)$$

となる。この左辺に置換積分の公式を使うと

$$\int_{V_0}^V \frac{1}{V} dV = -\gamma \int_0^t dt \quad (1.5.16)$$

となる。ここで左辺の積分変数が t から V に変わったので、積分範囲も変わったことに注意。 $V_0 = v_0 - g/\gamma$ である。積分を実行すると

$$\log |V/V_0| = -\gamma t \quad (1.5.17)$$

となり、結局

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} \quad (1.5.18)$$

となる。 $v_0 = 0$ に注意して、元の変数 v に戻ると、

$$v(t) = \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (1.5.19)$$

となる。

—— 問い ——

式 (1.5.3) から $x(t)$ を計算してみよ。

—— 問い ——

初期の速度が $v_0 > g/\gamma$ のときに解を求めてみよ。

— 問い —

時間が無限大のときの速度（終端速度という）が g/γ となることを示せ。

— 問い —

空気中であれば、摩擦力は速度の 2 乗に比例することが知られている。つまり、1 次元の運動を仮定すれば

$$F = -\gamma' mv^2 \quad (1.5.20)$$

となる。このときに、適当な初期条件でニュートン方程式を解いてみよ。

1.5.4 バネによる運動：単振動

普通のバネは、平衡の位置（自然長）から引っ張ると、その変位に比例した力で平衡の位置に戻ろうとする性質がある。変位の起こる方向を x 方向とすると、この力は

$$F = -kx \quad (1.5.21)$$

と表すことができる。ただし、 x は平衡の位置から測った変位量を表す（図 1.6）。ここで k はバネ係数と呼ばれ、バネの堅さを表す量である（ k が大きいほど伸び縮みは起こり難いので、バネは堅い）。

この場合の 1 次元のニュートン方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.5.22)$$

となる。これは 2 階の微分方程式なので解くのが少々厄介である。ここではやや一般性に欠けるが、複素数を使って解く方法を示そう。ただし、オイラーの公式 (**Euler's formula**) を使うので、これについても後でまとめた。

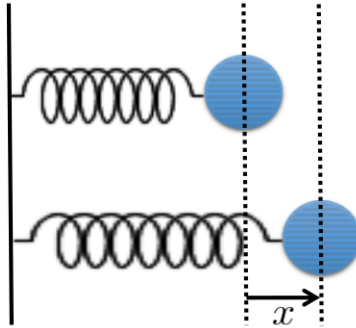


図 1.6 上：静止した自然長のばね。下： x だけ自然長から伸ばしたばね。

以下の複素数の変数を導入する。

$$z = x + i\sqrt{\frac{m}{k}}v \quad (1.5.23)$$

すると、これは式 (1.5.2), (1.5.3) から、

$$\frac{dz}{dt} = -i\sqrt{\frac{k}{m}}z \quad (1.5.24)$$

という式を満たすことが分かる（各自確かめよ）。これは速度に比例した摩擦を受ける場合と式が同じなので、同じ解法が使える。つまり、一般解は

$$z(t) = z(0)e^{-i\omega t} \quad (1.5.25)$$

となる。ここで、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5.26)$$

と置いた。これはバネに固有の角振動数 (**angular frequency**) と呼ばれる。

初期状態を $x(0) = x_0, v(0) = 0$ (バネを x_0 まで伸ばして、静かに離す) とすると、

$$z(0) = x(0) + i \frac{v(0)}{\omega} = x_0 \quad (1.5.27)$$

となって、 $z(0)$ は実数になる*7。よって、解は

$$z(t) = x_0 e^{-i\omega t} \quad (1.5.28)$$

となる。最後に、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.5.29)$$

を用いると、

$$z(t) = x_0 e^{-i\omega t} = x_0 (\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (1.5.30)$$

となるので、 z の定義から、

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad (1.5.31)$$

$$v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t \quad (1.5.32)$$

となる。これは ω の角振動数で振動する運動であり、もっとも単純な振動であることから単振動 (**simple oscillation**) と呼ばれている。

問い

初期状態が $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ という一般的な状態のとき、解はどうなるか？

重要な公式：オイラーの公式

ここで振動・波動を学ぶ上で非常に役に立つ数学について説明しておこう。それはオイラーの公式であり、以下のような式である。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.5.33)$$

*7 初速度があれば、 $z(0)$ は複素数になる。

ただし、 θ は実数とする。ここで右辺は実部が $\cos \theta$ 、虚部が $\sin \theta$ の複素数を表していることは簡単に分かる。左辺は指数関数であるが、そこに純虚数の $i\theta$ が乗っかっているというところがポイントである。

この式にはいくつかの証明法があるが、大学レベルの証明法はテイラー展開（数学の授業参照）を使うものである。両辺を θ に関してテイラー展開していくと、左辺は

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \dots \quad (1.5.34)$$

となり、この実部と虚部を集めると、

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta}\} = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \dots \quad (1.5.35)$$

$$\operatorname{Im}\{e^{i\theta}\} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots \quad (1.5.36)$$

これらはまさに、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ をテイラー展開したものに等しくなる！証明終わり。

しかし、このままだと狐につままれたような話なので、実際オイラーの公式を使って納得してみよう。たとえば、以下のような式を考える。

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad (1.5.37)$$

これは自明な式である。これに $A = i\alpha, B = i\beta$ を代入してみると、

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \quad (1.5.38)$$

となる。ただし、 α, β は実数とする。この左辺をオイラーの公式を使って「展開」すると、

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \quad (1.5.39)$$

右辺のほうは $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$ のそれぞれにオイラーの公式を使うと、

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &\quad + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

となるので、式 (1.5.39) の実部と虚部と比べると、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1.5.41)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \quad (1.5.42)$$

となる。これは三角関数の加法定理に他ならない。つまり、オイラーの公式から加法定理が導けた。

— 問い —

i^i , つまり、 i の i 乗の値はいくつか？この値は実際、1 つには決まらない。それはなぜか？

振動の一般的な性質

この単振動に振動の一般的な性質は既に現れている。図にあるように、振動とはある振動数 (**frequency**) で振動する、振幅 (**amplitude**) をもった周期運動のことである。一般的に振動を表す式は

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (1.5.43)$$

となる。ここで ω が振動数、 A が振幅である。また、周期 T は $2\pi/\omega$ で与えられる。

θ は位相 (**phase**) を表し、これも振動において非常に重要な量である。位相は 2 つ以上の振動があるときのその差を特徴づける量である。例えば、振動数と振幅が同じ 2 つの振動があるとする。

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \theta_1) \quad (1.5.44)$$

$$x_2(t) = A \cos(\omega t + \theta_2) \quad (1.5.45)$$

この場合、これらの振動は時間差が $(\theta_1 - \theta_2)/\omega$ だけずれている振動になっている (図 1.7)。

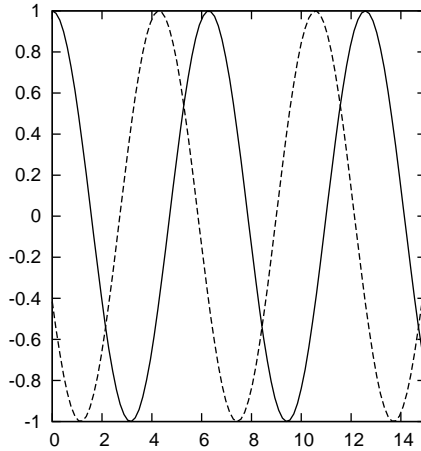


図 1.7 $A = 1.0, \omega = 1.0, \theta_1 = 0.0, \theta_2 = 2.0$ としたときの 2 つの振動。
このときは 2 つの振動は時間が 2 だけずれたものになっている。

1.5.5 減衰振動

減衰振動のニュートン方程式

単振動は周期 $2\pi/\omega$ で永遠に振動し続けるが、摩擦が働くとその振動は止まってしまう。摩擦の生じる状況として、再び水の入った試験管にバネにつながった粒子を入れることを考えてみよう。その粒子にはバネの力+速度に比例した摩擦力が働くので、ニュートン方程式を書き下すと、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma m v \quad (1.5.46)$$

となる。この運動は後で分かるように、減衰する振動を表すので、減衰振動 (**damped oscillation**) と呼ぶ。

減衰振動の解法：微分方程式論

ではこの減衰振動のニュートン方程式を解こう。もっとも標準的なやり方（微分方程式論を使ったもの）を以下で示す。まず式 (1.5.46) を整理すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (1.5.47)$$

となる。ここで、式 (1.5.26) を使った。

さて、ここからがお作法的な手順である。まず、解が指数関数になっている、つまり $x(t) = e^{\lambda t}$ であると仮定する。これを式 (1.5.47) に代入すると、

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad (1.5.48)$$

となる。この2次方程式から2つの解 λ_+ , λ_- が得られる。実際に書き下すと

$$\lambda_+ = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (1.5.49)$$

$$\lambda_- = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (1.5.50)$$

となる。

線形の微分方程式の解法より、式 (1.5.47) の解は

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} \quad (1.5.51)$$

と一般的に表せることが分かっている*8。

γ が 2ω より小さいとき ($\gamma < 2\omega$)、有効振動数を

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega^2}} \quad (1.5.52)$$

*8 これが実際、解になっていることは代入してみれば分かる（各自確かめよ）。また、 C_+ , C_- は初期条件から決まる定数である。

で定義すると、

$$\lambda_+ = -\frac{\gamma}{2} + i\Omega, \quad (1.5.53)$$

$$\lambda_- = -\frac{\gamma}{2} - i\Omega \quad (1.5.54)$$

となるので、一般解は

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}(C_+ e^{i\Omega t} + C_- e^{-i\Omega t}) \quad (1.5.55)$$

と書ける。オイラーの公式を使うと、括弧の中は振動数 Ω で振動していることが分かる。また、それにかかっている因子は時間とともに指数関数的に減衰している。よって、これは減衰しながら振動している運動を表しており、減衰振動の解となっている（図 1.8 左を参照）。

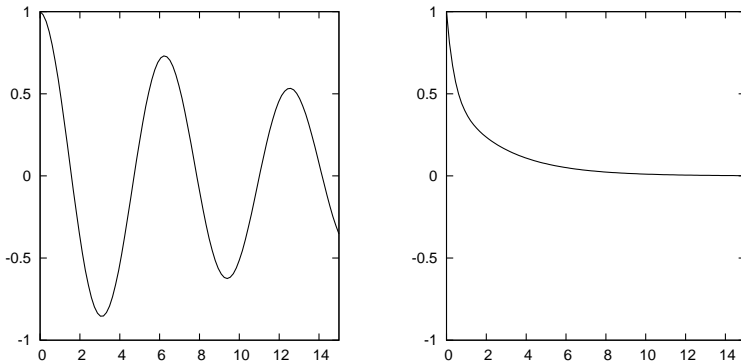


図 1.8 左: $\omega = 1.0, \gamma = 0.1, C_+ = C_- = 0.5$ のときの減衰振動。右: $\omega = 1.0, \gamma = 3.0, C_+ = C_- = 0.5$ のときの減衰振動。

問い

$x(0) = x_0, v(0) = v_0$ という初期状態のとき、減衰振動の係数 C_+, C_- が具体的にどうなるか求めよ。 $\gamma < 2\omega$ のときを考えよ。

—— 問い ——

$\gamma > 2\omega$ の場合は、 λ_+, λ_- はともに負の実数になり、解は振動せずに、
図 1.8 右のように減衰していく。このときの関数形を求めよ。

—— 問い ——

$\gamma = 2\omega$ のときは何が起こるか？

1.5.6 強制振動

強制振動のニュートン方程式

さて、減衰振動を理解できれば、強制振動 (**forced oscillation**) の議論に進むことができる。強制振動とは、減衰振動する振動に外部から周期的な外場をかけることを意味する。式で書くと以下のようなになる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma m v + f \cos \omega_f t \quad (1.5.56)$$

つまり、減衰振動の場合と比べると、 $f \cos \omega_f t$ という時間に依存する力が余分にかかっているということである。ここで ω_f は外場の振動数であり、バネの振動数 ω と一般には異なっていることに注意。この式は後で述べるように共振（共鳴）現象を調べるための基本的なモデルとなっている。

強制振動の解法

このニュートン方程式を整理すると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega_f t \quad (1.5.57)$$

となる。この微分方程式を解くために、実数の $x(t)$ ではなく、複素数の $z(t)$ を使うことにしよう。つまり、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = \frac{f}{m} e^{i\omega_f t} \quad (1.5.58)$$

を考える。この式の実部が式 (1.5.57) になることはオイラーの公式からすぐ分かる。

この場合も減衰振動の場合と同様に指数関数を解として仮定しよう。ただし、外部から ω_f という振動数で揺さぶっているので、解も

$$z(t) = Ae^{i\omega_f t} \quad (1.5.59)$$

という形になることを仮定しよう*9。これを式 (1.5.58) に代入すると、

$$(\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma\omega_f)A = \frac{f}{m} \quad (1.5.60)$$

が得られる。よって、

$$A = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma\omega_f} \quad (1.5.61)$$

となる。解 $x(t)$ は $z(t)$ の実部であるから、

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{z(t)\} = \text{Re}\{Ae^{i\omega_f t}\} \\ &= |A| \cos(\omega_f t + \delta) \end{aligned} \quad (1.5.62)$$

ここで

$$A = |A|e^{i\delta} \quad (1.5.63)$$

として、 A の絶対値 $|A|$ とその位相 δ を導入した。絶対値は

$$|A| = \sqrt{AA^*} \quad (1.5.64)$$

として計算できるので、

$$|A| = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + \gamma^2\omega_f^2}} \quad (1.5.65)$$

*9 正確にはこれは特解であり、これに減衰振動のときに求めた解を足すことで一般解が得られる。しかし、減衰振動の解は減衰してゼロになるので、ここでは最初から除いた。

となる。位相 δ に関しては、オイラーの公式を使って計算してみると、

$$\cos \delta = \frac{\omega^2 - \omega_f^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + \gamma^2 \omega_f^2}} \quad (1.5.66)$$

という関係を満たすことが分かる。これから δ が求まる。

問い

この関係式 (1.5.66) を確かめてみよ。

ラジオ (radio)

上の強制振動の意味をさらに知るために、具体的な例を出そう。それは交流回路の一種の **LCR 直列回路** である (回路に関しては、電磁気の章で説明がある)。LCR 直列回路とは、図 1.9 にあるように、コンデンサ、コイル、抵抗が直列につながったものである。これに交流電圧をかけることを考えると、その満たすべき方程式は

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega_f t \quad (1.5.67)$$

となることが知られている。ここで、 L はインダクタンスと呼ばれる量、 C はコンデンサの容量、 I は電流、 Q は電荷であり、これらの量は電磁気の章で説明がある。この式を一回 t で微分し、 $I = dQ/dt$ であることを使うと、

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{V_0 \omega_f}{L} \cos \omega_f t \quad (1.5.68)$$

となる。これは

$$\gamma \leftrightarrow \frac{R}{L}, \omega^2 \leftrightarrow \frac{1}{LC}, \frac{f}{m} \leftrightarrow \frac{V_0 \omega_f}{L}, \quad (1.5.69)$$

という読み替えをすると、式 (1.5.57) と全く同じである。よって、回路や電磁気のことがよく分からないとしても、微分方程式が同じであることからその性質を理解することができる。

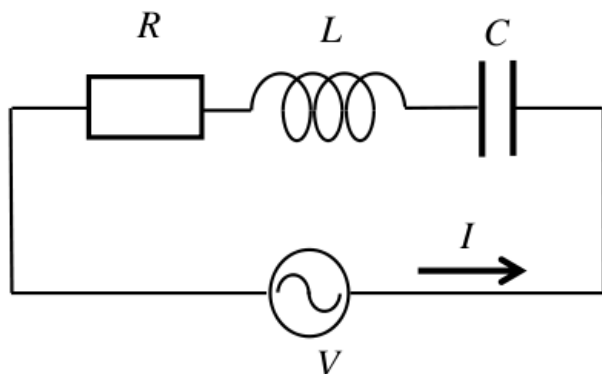


図 1.9 LCR 回路。

強制振動のときと同じで、長時間後の解は

$$I(t) = |A| \cos(\omega_f t + \delta) \quad (1.5.70)$$

ただし、

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{V_0 \omega_f}{L} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_f^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega_f^2}} \\ &= V_0 \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2}} \end{aligned} \quad (1.5.71)$$

となる。 δ に関しては式 (1.5.66) から計算できる。よって、回路のインピー

ダンス*10は $Z = V_0/|A|$ から、

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2} \quad (1.5.72)$$

となる。さて、これから、

$$\omega_f L = \frac{1}{\omega_f C} \quad (1.5.73)$$

つまり、

$$\omega_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.5.74)$$

のとき、 Z は最小になり、電流の大きさ $|A|$ は最大になる。図 1.10 を見よ。ラジオを聞くときは、ダイヤルを回してある特定の周波数に合わせるが、そのときは、 C を変えており*11、共鳴周波数 $1/2\pi\sqrt{LC}$ を放送局の周波数に合わせることで特定の信号をピックアップすることができる。これがラジオの原理である*12。

♣ 核磁気共鳴画像法 (MRI)

この共鳴現象の医療現場での重要な応用例が核磁気共鳴画像法 (MRI) である。その基礎となる原理は、核磁気共鳴 (NMR) という概念であるが、それをきちんと理解するためには量子力学を用いなければならない*13。それをやっていると大変なので、ここでは電磁気学を用いた現象論的な説明にとどめる。また、MRI でどのように 2 次元の画像を得るかという部分も非常に専門的になるので、ここでは省略する。

*10 インピーダンスとは、抵抗の概念を交流回路に対して一般化したものであり、交流の電圧÷交流の電流で定義される。

*11 容量を変えることのできるコンデンサ (バリコンと呼ばれる) を使う。

*12 厳密なことを言うと、ラジオのときには LC 並列回路を使うが、ここでは原理的なことを伝えるために LCR 直列回路を取り上げた。

*13 ただし、量子力学の中でもっとも単純な、2 準位系もしくはスピン 1/2 (電子などのスピン) を考えればよい。とはいえ、それらの間の量子的な相関を考え出すと話は複雑になる。後で出てくる、ベルの定理の議論参照。

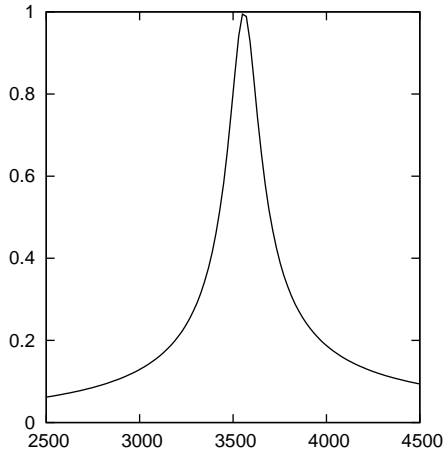


図 1.10 $L = 20 \text{ mH}$, $C = 0.1 \mu\text{F}$ のときの LCR 回路における共振現象。共振周波数は $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 3559 \text{ Hz}$ になる。

まず、生体分子などを構成している原子は、さらに電子と原子核からできているが、これらは固有のスピンと呼ばれる性質をもっている。これは現象論的には、小さな磁石だと思ってもらえばよい。MRI で測るときは、大部分、体内にある水素の核（すなわち陽子）のもっているスピンを測定する。体内には水が大量にあり、それぞれが水素をもっているのので、それを測っていることになる。

さて、そういった水素のスピンの多数集まると大きな磁石になる。その磁石の物理的な性質を表す量が磁化であり、それを M で表す。電磁気学から

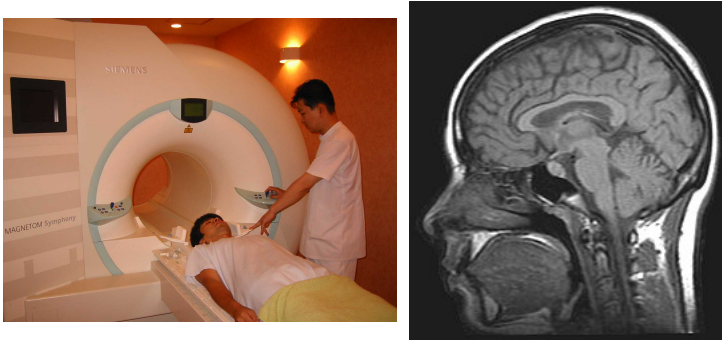


図 1.11 左：MRI 装置。右：MRI による脳の断面図。

磁化は以下の運動方程式を満たす*14：

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (1.5.75)$$

ただし、 \times は外積を表す。よって、 B_0 の大きさの磁場が z 方向にかかっているとすると、 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)^t$ なので、

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y \quad (1.5.76)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x \quad (1.5.77)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = 0 \quad (1.5.78)$$

となる。これから、 z 方向の磁化は変化しないことが分かる。

$$M_z(t) = M_{z0} \quad (1.5.79)$$

*14 この式の導出は結構難しいので、こういう運動方程式が成り立つのだと思ってもらえばよい。また、この式は地球ゴマの運動を表す式と実は同じなので、頭の中で地球ゴマをイメージしておけばよい。後で剛体のコマの運動方程式を簡単にだが議論する。

また、 M_x, M_y の式から

$$\frac{d^2 M_x}{dt^2} = -\omega_L^2 M_x \quad (1.5.80)$$

$$\frac{d^2 M_y}{dt^2} = -\omega_L^2 M_y \quad (1.5.81)$$

となることが分かる。ここでラーモア振動数

$$\omega_L = \gamma B_0 \quad (1.5.82)$$

と呼ばれる振動数を導入した。すると、上の式は単振動の式に他ならないので、その解は

$$M_x(t) = M_0 \cos(\omega_L t + \delta) \quad (1.5.83)$$

$$M_y(t) = -M_0 \sin(\omega_L t + \delta) \quad (1.5.84)$$

となる。

実際は x, y 方向の磁化は減衰していく。これを表すために、減衰振動の場合と同じで、 $1/T_2$ に比例する減衰項を導入する（これをブロッホ方程式と呼ぶ）。

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y - \frac{M_x}{T_2} \quad (1.5.85)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x - \frac{M_y}{T_2} \quad (1.5.86)$$

これを解くために、以下の複素数の磁化を定義する。

$$M = M_x + iM_y \quad (1.5.87)$$

すると、この「複素」磁化は

$$\frac{dM}{dt} = -i\omega_L M - \frac{M}{T_2} \quad (1.5.88)$$

という方程式を満たす。例によって、 $M = e^{\lambda t}$ という解を仮定すると、

$$\lambda = -i\omega_L - \frac{1}{T_2} \quad (1.5.89)$$

となるので、一般解は

$$M(t) = M_0 e^{-i\omega_L t} e^{-t/T_2} \quad (1.5.90)$$

となる。これはまさに減衰振動を表している*15。

さて、ここで MRI のときには、さらに z 方向に垂直な方向（つまり、 x か y 方向）に弱い振動磁場を掛ける。すると、これは減衰振動に外部から振動する力をかけることに相当するので、強制振動と同じ状況になる*16。振動磁場の振動数を ω_f とすると、それがラーモア振動数 ω_L と異なっているときには特に面白いことは起きない。しかし、

$$\omega_f \simeq \omega_L \quad (1.5.91)$$

のときに共振現象がおこる。この場合は、振動磁場の効果が非常に強くなり、磁化は振動磁場をかけている方向を回転軸として回転する。つまり、磁石が向きを変える。その後、そういう振動磁場を掛けるのを止めると、磁化は元の状態に戻る。その際も磁石は向きを変える。そういった過程で、磁石が向きを変えるときには、コイルを設置しておくで、そこに電流が発生する*17。それを MRI では検出する。

それでは MRI でどうして断面図が得られるのか？そのためには z 方向の磁場を z の関数、簡単には z に比例するようにしてやればよい。

$$B_z(z) = B'_0 z \quad (1.5.92)$$

すると、ラーモア振動数も z に比例する。

$$\omega_L = \gamma B'_0 z \quad (1.5.93)$$

よって、振動磁場の振動数を徐々に変えていくと、共鳴する場所は z 方向で徐々に異なることになる。つまり、共鳴する平面 $z = z_0$ が存在し、それが MRI の断面となるわけである。（その断面内の 2 次元画像情報がどのように得られるかということは、非常に専門的になるので、ここでは述べない。）

*15 実際は z 方向の成分も減衰していく。その緩和時間は T_1 と表される。

*16 実際、式で表すと面倒なので、ここでは敢えて書かない。

*17 磁場が時間変化することによって誘導起電力が発生し、それが電流になる。

タコマ橋の倒壊、原子炉もんじゅの事故

これは流体力学の問題であるが、その基本は共振現象である。水や気体のような流体が一定速度で流れている状況を考える。そして、そこに障害物をおくと、その流れは乱れる。流体の速度が小さい場合は乱れは小さいが、大きくなると、乱れも大きくなる。流体の流れがあるしきい値を越えると、そこにはカルマン渦という渦の流れが発生する（図 1.12）。渦の発生はある周期でおこり、その渦は障害物と相互作用するので、渦の発生の周期が、障害物のもっている周期（これは後の連成振動のところではどういふものか明らかになる）とほぼ等しくなると、共振現象が起こる。

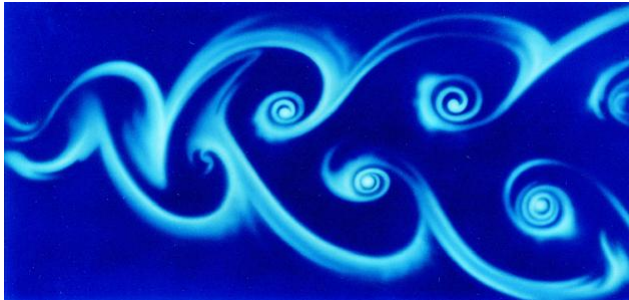


図 1.12 カルマン渦。左から右に向かって流体が流れ、左の端に障害物がある。

タコマ橋の場合（図 1.13 上）は、流体は空気である。空気流が橋と相互作用することで、カルマン渦が発生し、その渦の周期と、橋のあるゆがみの周期が等しくなったために、流体のエネルギーが流れ込み、崩壊が起こった*18。もんじゅの場合（図 1.13 下）は、原子炉を冷やすために流している、液体ナトリウムが流体に対応する。その温度を測るための熱電対を収めている「さや」が流体のカルマン渦の周期と共振し、その結果、さやが壊れてナ

*18 動画は <http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxw> を参照。

トリウムが漏れだすことになった。このように、共振現象は思わぬ事故の原因になっている場合が多い。

—— 問い ——

こういった事故を防ぐためにはどうしたらよいだろうか。つまり、橋などをどのように設計したらよいだろうか。

—— 問い ——

共振現象を積極的に使って発電などを行うことはできるか。考えてみよ。



図 1.13 上：タコマ橋の倒壊。下：原子炉もんじゅの事故現場。

第2章

エネルギーの性質

2.1 エネルギーとは何か

これまでいくつかの簡単な例で、ニュートンの方程式を手で解き、その運動の性質について議論した。しかし、より複雑な系を手で解くことは、原理的にも*1実際的にも不可能になる。その場合はコンピュータを使って解くことになる。ただし、前書きで述べたように、ニュートン方程式に基づいて、コンピュータを使って水の流れを解くことは現在でも困難である。だが、ニュートンの方程式をそのように「真正直」に解かなくても分かることもある。また、その際に、有用な概念が出てくる：そのうちの一つがエネルギー (energy) である。この概念は力学において最初に認識されたが、電磁気学、相対論、熱力学、量子力学といったすべての物理学を貫く重要な概念である。

*1 カオス (chaos) と呼ばれる現象が生じると、手では解けなくなる。これは自由度の大きな系では非常に一般的な現象である。

2.2 1次元の場合のエネルギー

まず、古典力学において、エネルギーという概念がどのように現れるかを見よう。簡単のために、1つの質点の1次元のニュートン方程式を考え、その両辺に v をかけてみよう。

$$m \frac{dv}{dt} v = F(x)v \quad (2.2.1)$$

ここでは力は位置によるものとして、 $F(x)$ と書いた。さて、この式を t に関して積分してみよう。すると、

$$m \int v \frac{dv}{dt} dt = \int F(x) \frac{dx}{dt} dt \quad (2.2.2)$$

この式の左辺は v に関する積分に、右辺は x に関する積分に変数変換できるので、以下になる。

$$m \int v dv = \int F(x) dx \quad (2.2.3)$$

左辺は簡単に計算できて

$$\frac{1}{2}mv^2 + C \quad (2.2.4)$$

となる (C は積分定数)。ここで現れた v の関数を**運動エネルギー (kinetic energy)** と呼ぶ。

一方、右辺は適当な場所から x への積分であると考え、これは x の関数であり、

$$V(x) = - \int^x F(x') dx' \quad (2.2.5)$$

という量を定義できる。これが**位置エネルギー (potential energy)** と呼ばれる量であり、力の積分にマイナスをつけたものである。ここで積分変数にはダッシュをつけたが、これは積分の範囲にある x と区別をつけるためのものである。

さて以上をまとめると、

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = -C \quad (2.2.6)$$

となり、この右辺は一定の数なので、これは運動エネルギーと位置エネルギーを足したものが一定（時間に依存しない）ということの意味する。これをエネルギー保存則 (**conservation of energy**) と呼ぶ。

この法則の重要なところは、位置や速度は一般に時間の関数であり、 $x(t), v(t)$ と書かれるわけだが、それから運動エネルギー、位置エネルギーを計算して足すと常に一定になるということである。これは実際に上で計算した例からも確かめることができる。

—— 問い ——

1次元の一定の力の場合にエネルギー保存則が成り立つことを具体的に確かめてみよ。

—— 問い ——

1次元のバネの力の場合にエネルギー保存則が成り立つことを具体的に確かめてみよ。

もっと重要なのは、 $x(t), v(t)$ を具体的に計算できなくても、全エネルギーは一定になるということである。これは運動が (x, v) という空間（これを相空間という）の中で制限されているということの意味する。これは粒子の運動の性質を考える上では重要なことである。

ただし、摩擦力が働いているとエネルギー保存則は成り立たない。これは摩擦力が、エネルギーを系の内部（例えばバネ）から外部（例えば水）に受け渡す過程だからである。

—— 問い ——

1次元の減衰振動の場合、運動エネルギーと位置エネルギーを足したものは一定ではない。それがどう時間変化するか調べてみよ。

2.3 2次元以上の場合のエネルギー

2次元以上の系の場合も同様に考えて運動エネルギー、位置エネルギーを定義する。しかし、位置エネルギーに関しては若干注意が必要になる。というのも、それが線積分 (line integral) を使って定義されるからである。以下、本質的なことは2次元系とそれ以上の系で変わらないので、2次元系の場合のみについて説明する。

1次元のときと同様に、ニュートン方程式に速度ベクトルをかけるが、このときはベクトルの内積 (inner product) で考える。

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.3.1)$$

そして、これを時間に関して積分すると、

$$m \int \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.3.2)$$

となる。

この式の左辺は簡単に処理できる。 t から積分変数を速度に変換すると

$$m \int \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = m \int v_x dv_x + m \int v_y dv_y \quad (2.3.3)$$

となるので、これを積分すると、

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + C \quad (2.3.4)$$

となる。これが2次元系の運動エネルギーである。なんのことはない、これは1次元系の運動エネルギーの和であり、非常に自然な結果である。

一方、左辺のほうは形式的に

$$\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dt = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int [F_x(\mathbf{r})dx + F_y(\mathbf{r})dy] \quad (2.3.5)$$

という積分になる。この右辺の積分は見慣れないものであるが、これが線積分である。数学的には、これは

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(t_i) \cdot (\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)) \quad (2.3.6)$$

という和を考えて (図 2.1)、 $\mathbf{r}(t_{i+1})$ と $\mathbf{r}(t_i)$ の間隔が0になるように極限をとったものである。しかし、それでは実際の積分をどう手で計算するのか分からないだろうから、ここではこれをパラメータ表示で処理する。

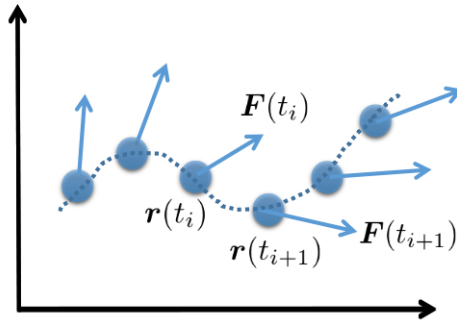


図 2.1 線積分の原理的な説明。

まず線積分を行う際には、ある線分 (経路) を定義し、それを C と名付ける。また、それには始点と終点があるとして、 P_0, P_1 と名付ける (図 2.2)。そのとき、この線分上の点 P はあるパラメータ s を使って、 $\mathbf{r}(s)$ と表すことができる。例えば、 P_0 から線分上で測った距離を s とすればよい。すると、このパラメータ s を使って、上の線積分 I は

$$I = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_{s_0}^{s_1} ds \left[F_x(\mathbf{r}'(s)) \frac{dx'}{ds} + F_y(\mathbf{r}'(s)) \frac{dy'}{ds} \right] \quad (2.3.7)$$

と再定義することができる。ここで1次元のときと同様に、ダッシュのついた $r' = (x', y')$ を積分変数とした。ここまではよく分からないので、具体的な例を調べてみよう。

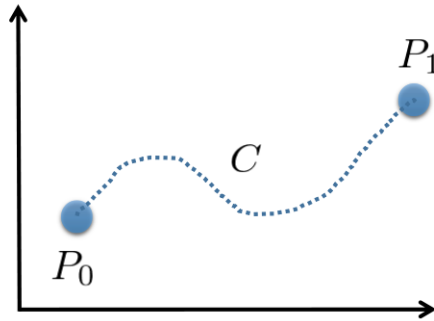


図 2.2 線積分のための始点 P_0 と終点 P_1 。

2次元の具体的な例として、簡単な2次元のバネの力を考えよう。つまり、

$$F_x = -kx, \quad F_y = -ky \quad (2.3.8)$$

である。また、線分として、 $(0,0)$ から $(1,1)$ への直線を考える。すると、これは

$$x' = s, \quad y' = s \quad (2.3.9)$$

とパラメータ表示できる。このように表示すると、 $s = 0$ のときは $(0,0)$ 、 $s = 1$ のときは $(1,1)$ を表し、 s が 0 から 1 の間のときは、それをつなぐ直線上の点であることは簡単に分かる。

これを上の式に入れると、

$$\int_0^1 ds [-ks - ks] = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k = -k \quad (2.3.10)$$

となる。

問い

2次元のバネの力に対して、

$$x' = s, \quad y' = s^p$$

という曲線（ここで p は適当な実数）に沿って、 $(0,0)$ から $(1,1)$ まで線積分 I を計算してみよ。それは p によるか？

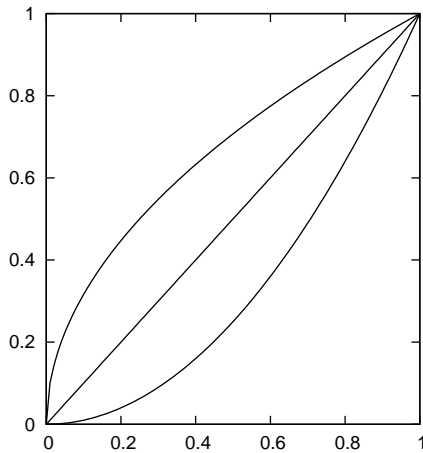


図 2.3 s を変えた時の線分の違い。

問

以下の力

$$F_x = -ky^2, \quad F_y = -kx^2 \quad (2.3.11)$$

に対して

$$x' = s, \quad y' = s^p$$

という曲線に沿って、(0,0) から (1,1) まで線積分 I を計算してみよ。
それは p によるか？

2.4 保存力

上で分かるように、力によっては、始点と終点を定めたときに、線積分が経路による場合とよらない場合がある。経路によらない場合が実は物理では重要であり、これを保存力 (**conservative force**) という。上の例では、2次元のバネの力は保存力であり、(2.3.11) の力は保存力ではない。

保存力に対しては、以下のように位置エネルギーを定義できる：

$$V(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \quad (2.4.1)$$

$$= - \int_{s_0}^s ds \left[F_x(\mathbf{r}'(s)) \frac{dx'}{ds} + F_y(\mathbf{r}'(s)) \frac{dy'}{ds} \right] \quad (2.4.2)$$

これは適当な点 \mathbf{r}_0 から注目する点 \mathbf{r} までの線積分であり、パラメータ表示で $\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}$ となるように定義されている。

例えば2次元のバネの力で位置エネルギーを求めると以下のようになる。まず参照点として原点を選ぶ。そこから (x, y) までのパラメータ表示として、簡単な $x' = xs, y' = ys$ を選ぶ。このとき $s_0 = 0, s = 1$ である。すると、上の積分は

$$V(\mathbf{r}) = \int_0^1 ds [kxs \cdot x + kys \cdot y] = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 \quad (2.4.3)$$

となる。これは1次元のバネの位置エネルギーの和であり、自然な結果である。

ここで式(2.3.2)の議論に戻ろう。この式の左辺から2次元の運動エネルギーが出てきたが、上の議論から、保存力に対しては右辺からは2次元の位置エネルギーが出てくる。よって、

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + C = -V(x, y) \quad (2.4.4)$$

から

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + V(x, y) = -C \quad (2.4.5)$$

となるので、これは2次元の系でのエネルギー保存則を表す。

現実には、放物運動は空気抵抗などによってエネルギーを失い、全エネルギーを計算しても一定になっていない場合がある。しかし、その場合であっても、その失われたエネルギーを熱エネルギー（この定義については、熱力学の章を参照）として解釈し、それを全エネルギーに足し合わせれば、やはり全エネルギーは保存する（時間によらず一定になる）。これを熱力学の第一法則と言い、熱力学の章で説明される。また、電気的なエネルギー、磁気的なエネルギーというものもあり、これらは電磁気の章で説明される。エネルギーに関してもっとも重要なことは、ある現象に関わるエネルギーをすべて勘定に入れて足し合わせれば、それは常に保存するということである。これは物理でもっとも重要な原理の一つである。

2.4.1 保存力の判定条件

さて保存力は線積分したときに、その値が始点と終点だけにより、経路には寄らないようなものとして定義したが、これでは保存力がどうか知るためには、いくつもの異なる経路に関して線積分しなければ分からないように思える。しかし、実はそうしなくてもよい！

例えば、経路として (x, y) から $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ に向かう微小な経路を考える（図 2.4）。ここで、経路としては単純な2つの経路 C_1, C_2 を考え

て、その線積分が同じになる条件を考えよう。 C_1 に対しては、線積分は近似的に

$$F_x(x, y)\Delta x + F_y(x + \Delta x, y)\Delta y \quad (2.4.6)$$

となるが、 C_2 に対しては

$$F_y(x, y)\Delta y + F_x(x, y + \Delta y)\Delta x \quad (2.4.7)$$

となる。よって、これらが同じであるためには

$$[F_x(x, y + \Delta y) - F_x(x, y)]\Delta x = [F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x, y)]\Delta y \quad (2.4.8)$$

でなければならない。これを $\Delta y \Delta x$ で割って極限をとることで、

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (2.4.9)$$

という関係式が得られる。これが2次元の力が保存力であるための条件である。

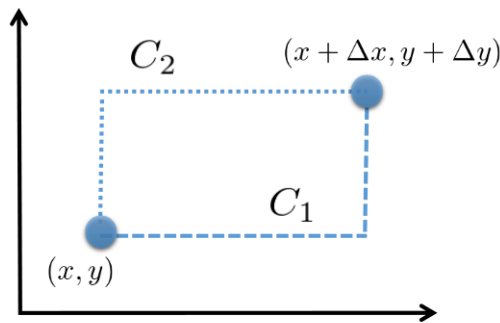


図 2.4 保存力の条件を得るための線積分。

— 問い —

2次元のバネの力、またの力 (2.3.11) が保存力かどうか (2.4.9) を使って判定せよ。また、以下の力は保存力か。

$$F_x = -x - 2axy, \quad F_y = -y - ax^2 + ay^2 \quad (2.4.10)$$

— 問い —

3次元の力が保存力かどうかを判定するための式を導け。

2.5 仕事

また、力の線積分そのものは仕事 (**work**) とも呼ばれている。

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.5.1)$$

これはある参照点から \mathbf{r}_0 から \mathbf{r} までの線積分として定義されているが、力が保存力である必要はない（保存力であってもよい）。仕事は力の釣り合いを議論する際（仮想仕事の原理）や、熱力学で非常に重要になる概念である。これらについては後で触れられる。

例えば、力が保存力 \mathbf{F}_{cons} と時間に依存する外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$ の和で書けている場合を考える。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cons}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) \quad (2.5.2)$$

すると、エネルギー保存則の議論を繰り返すことから、

$$\Delta \left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + V(x, y) \right) = \Delta W \quad (2.5.3)$$

となる。これは外力による仕事によって、系の（内部）エネルギーが変化するということを表している。つまり、仕事によってエネルギーを変化させたり、またはエネルギーを変化させることによって仕事を取り出せるということの意味している。このことについてのより一般的な議論は熱力学の章を参照。

第 3 章

単位について

さて、いままでニュートン方程式やエネルギーの議論を行ってきたが、力や加速度が具体的にどういう値（数値）なのか、という議論はしなかった。こういった物理量の数値を表すためには、メートルやセンチメートルのような単位 (units) が必要となる。通常、古典力学で出てくる単位は 2 つある。

- MKS 単位系：長さをメートル [m]、質量をキログラム [kg]、時間を秒 [s] で測る*¹。
- CGS 単位系：長さをセンチメートル [cm]、質量をグラム [g]、時間を秒 [s] で測る。

MKS 単位系のほうがよく使われるようになってきたが、CGS 単位系もまだ使われる。

さて、以下で具体的に物理量はどのくらいの数値になるのかということを見ていこう。

- 速度：MKS 単位系では [m/s] で測る。
 - ウサイン・ボルトの速度：10.4 m/s
 - 高橋尚子の速度：4.9 m/s

*¹ MKS 単位系に電流、温度、物質量、光度の単位を加えたものを SI 単位系と言う。

- 新幹線の速度 : 83.3 m/s
- 水蒸気の平均速度 (20 度) : 637 m/s
- 人工衛星の速度 : 7.9×10^3 m/s
- 地球から宇宙へ飛び立つための速度 : 11.2×10^3 m/s
- 水素の周りの電子の速度 : 2.2×10^6 m/s
- 光の速度 : 3.0×10^8 m/s
- 加速度 : MKS 単位系では $[\text{m/s}^2]$ で測る。
 - 地球の重力加速度 : $9.8 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ G}$
 - 月の重力加速度 : $1/6 \text{ G}$
 - スペースシャトル離陸時の最大加速度 : 3 G
 - としまえんのシャトルループ : 6 G
 - 戦闘機の最大加速度 : 9 G
 - 太陽の重力加速度 : 27 G
 - 中性子星の重力加速度 : 10^{11} G
- 力 : MKS 単位系では $[\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$ で測り、その単位のことをニュートン $[\text{N}]$ と呼ぶ。CGS 単位系では $[\text{g} \cdot \text{cm/s}^2]$ で測り、その単位のことをダイン $[\text{dyn}]$ と呼ぶ。
 - 携帯電話の重さ : $0.1 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \simeq 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N}$
 - 2 つの携帯を 10 cm 離れたときに働く引力 : $6.7 \times 10^{-11} \text{ N}$
 - 太陽と地球の間に働く引力 : $3.5 \times 10^{22} \text{ N}$
 - 水素原子内の電子と陽子の間のクーロン力 : $9.2 \times 10^{-8} \text{ N}$
 - 水素原子内の電子と陽子の間の万有引力 : $4.1 \times 10^{-47} \text{ N}$
 - 筋肉の力を生み出すもととなる、ミオシン分子 1 個当たりが出す力 : $\simeq 3 \times 10^{-12} \text{ N}$
- エネルギー : MKS 単位系では $[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2]$ で測り、その単位のことをジュール $[\text{J}]$ と言う。化学や生物では $[\text{kcal}]$ という単位がよく使われるが、ジュールに換算すると、 $1 \text{ kcal} = 4184 \text{ J}$ である*2。

*2 また、単位時間当たりのエネルギーの変化量を仕事率と呼び、単位はワット $[\text{W} = \text{J/s}]$

-
- 携帯を地面から 1 メートルの高さに置いたときの位置エネルギー： $mgh \simeq 1 \text{ J}$
 - 東京タワーのてっぺんに人がいるときの位置エネルギー： $mgh \simeq 2 \times 10^5 \text{ J}$
 - 水素結合のエネルギー（1 モル当たり）： $\sim 2 \times 10^4 \text{ J} (= 5 \text{ kcal})$
 - ATP が加水分解されるときエネルギー（1 モル当たり）： $\sim 4 \times 10^4 \text{ J} (= 10 \text{ kcal})$
 - 成人男子の 1 日の必要摂取カロリー： $6.7 \times 10^6 \text{ J} (= 1600 \text{ kcal})$
 - 原爆のエネルギー（広島に落とされたリトルボーイの場合）： $\sim 6.3 \times 10^{13} \text{ J}$
 - 中型の台風エネルギー（半径 100 km, 高さ 10 km, 風速 30 m/s とした）： $\sim 1.4 \times 10^{17} \text{ J}$