

電磁気学の部

菊地浩人

2016年3月31日

第1章 概要と基本的事項

1.1 本部の特徴と構成について

電磁気学は、文字通り電気と磁気に関する学問である。電気というと、読者も日々利用して経験的に知っているように、現代の日常生活に欠かすことの出来ない物理現象の総称である。また、磁気は、子どもの頃に磁石を用いて砂場で砂鉄をくっつけて遊んだ経験が一度はあるように、磁石と関係したものであることは想像できるであろう。電気と磁気は、一見何の関係もなさそうであるが、近代における物理学の研究によって実は密接に関係していることが明らかにされた。

電磁気学の基礎方程式は、1864年にマクスウェル (J. C. Maxwell) によって導かれ [1]¹、マクスウェルが1879年に死亡した後、1880年代にヘルツ (H. R. Hertz)、ヘヴィサイド (O. Heaviside) によって、現在知られている形式に整理された。² この基礎方程式は、ベクトルで記述された4つの微分方程式となっていて、現在この4つの方程式が一般にマクスウェル方程式、或いはマクスウェルの方程式と呼ばれている。以下、本書で取り上げられる電磁気学の法則は、全てこのマクスウェル方程式から出発して現象に応じた条件を考慮することにより演繹的に導出されるものである。³ 本書第3部の古典力学においては、基礎方程式であるニュートンの運動方程式をアприオリに認め、ニュートンの運動の3法則から様々な現象を説明する立場を取った。電磁気学において、同様の立場で記述した方が一貫性があるかも知れないが、この部ではそのような立場を敢えて採用しなかった。その理由は、第1に、ニュートンの運動方程式の場合、現象を理解しやすく自然に受け入れられるが、マクスウェル

¹マクスウェルが記述した方程式は現在知られているマクスウェルの方程式ではなく、まだ十分に整理されていない記述であった。

²ヘルツとヘヴィサイドは協同ではなく全く別々にマクスウェルの基礎方程式を整理していた。当初、この電磁気学の基本方程式はマクスウェル方程式と呼ばれてなかったようで、有名なアインシュタインの特殊相対論の原論文では「マクスウェル-ヘルツ方程式」と表記されている。[2]

³法則にも系統性・階層性があることを意識せよ。

方程式は電場や磁場と言った目に見えない物理量が主体となっている関係上、方程式から現象を理解しにくいこと。第2に、ベクトルの微分方程式が一つではなく複数あり、数学的な取り扱いだけでも初学者には理解するのに時間がかかり、生命系を学習しようとする読者の目的と一致しないからである。そこで、本第5部では、わかりやすい静電気学の基本的な法則から出発して、生命現象を説明するために必要と思われる概念や物理量を理解するような構成になっている。

静電気学の基本的な法則は、基礎方程式であるマクスウェルの方程式とは異なる形で与えられているが、自然現象の本質的部分であることには相違ない。読者においては、この本質的部分を学習内容の出発点として、内容を論理的に把握するように努め、自身の頭の中で自分なりの論理的な枠組みを構築して欲しい。しかし、その一方、本部では電気回路のようなマクロな現象論も含めてある。電磁気学の学問的観点からは少々異質であるが、電気現象には他ならないものである上、様々な分野での利用価値は高いので、科学や技術の領域の常識として知っておくべきである。また、学習する際には、ミクロな視点とマクロな視点を意識的に峻別し、ミクロな本質論的な話は系統的な理解に努め、マクロな現象論はいつでも利用できるような知識として身につけて欲しい。

また、本書の立場から、生命に関して電磁気学の視点から簡単に言及しておく。生命は、生体分子の絶え間ない化学反応の連続で成立している系である。化学反応は、多くの場合、分子と分子が接近して、電子のやり取りを行う反応であるが、この電子の授受は電氣的な力関係で決まる現象である。即ち、生命は、分子レベルで電磁気学の法則を常に利用して存在しているマクロな系と言える。生命現象の一部分を切り取って、その機構を分子レベルで考える際には、電磁気学の知識が必須であることが理解出来るかと思う。

本部の構成は次のようになる。

1.2 電気の根源

冬に衣服を脱ぐときなど、パチパチと音がすることがある。これは衣服が電気を帯びたために起こる現象である。電気を帯びることを**帯電**と言う。帯電した物体に分布している流れのない電気を**静電気**と言う。ここで出てきた電気の根源となる粒子は、陽子 (proton) と電子 (electron) である。陽子は、更にクォークから構成されていることが知られている

が、ここではそこまで考えることはしないことにする。地球上では、ほとんどの物体は原子から構成されているが、この第5部では、原子は、原子核と電子から構成され、原子核は陽子と中性子（neutron）から構成されているとしよう。⁴この内、電気の根源となる粒子は、陽子と電子であり、それ以外に電気の根源となる粒子はない。

電気現象の元となる実体のことを示す言葉として、**電荷（electric charge）**という用語がある。従って、陽子と電子は電荷である。また、電荷を帯びた粒子のことを**荷電粒子（an electrically charged particle）**などとも呼ぶ。⁵古典力学で、質量という量（物理量）が出てきたが、陽子も電子も質量を持っている。電荷も質量のように、陽子と電子に備わっている性質（属性）であると、電磁気学の入門の立場としてアプリアリに捉えて欲しい。なぜ、そのようなものが存在しているのかは残念ながら筆者にもわからない。但し、質量は1種類であったが、電荷は2種類存在する。陽子と電子は異なる種類の電荷と考える。このように考えるのは、次のような性質があるからである：

- 同種類の電荷は互いに斥力を及ぼし合う
- 異種類の電荷は互いに引力を及ぼし合う

ここで、陽子の電荷を正とし、電子の電荷を負と約束する。⁶正の電荷を**正電荷**、負の電荷を**負電荷**と言う。即ち、陽子は正電荷、電子は負電荷である。また、大きさの無視できる質量を持った点を質点と言ったように、大きさの無視できる電荷を**点電荷（point charge）**と言う。

電荷が持つ電気の量のことを**電気量** 或いは**電荷量（electric charge）**と言う。電気量（電荷量）は、複数の電荷が集まっている状態での電気の量を指すこともある。なお、電気量の単位として、SI単位系ではクーロン（記号 **C**）を用いる。陽子と電子の電気量は、符号が異なるだけでその大きさ（絶対値）は全く同じであり、2桁の精度で $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。この値のことを、**電気素量（elementary electric charge）**と言い、慣

⁴原子核を構成している素粒子はその他にたくさんあることが知られているが、それらを見ても本章の範囲では何ら問題はない。更に本質的な内容を知りたい場合、まず本書の内容をしっかりと身につけた上で次のレベルとしてアプローチすればよい。

⁵イオンや α 線（実体はヘリウムの原子核）なども荷電粒子と呼ばれる。

⁶正の電荷と負の電荷という実体があるわけではなく、あくまでも斥力と引力の数学的な表記上、便宜的に導入された約束である。即ち、陽子を負の電荷、電子を正の電荷と約束することも可能であるが、歴史的な流れの中で陽子が正、電子が負と慣習的、社会的に決められているということである。

習的に e で表す。従って、帯電している物質の電気量の大きさは、必然的に電気素量 e の整数倍になる。

第2章 クーロン力（静電気力）

2.1 クーロンの法則

二つの質点の間に万有引力の法則が働くように、二つの点電荷の間にも力が働く。この二つの点電荷の間に働く力の大きさを記述した次の法則のことを**クーロンの法則（Coulomb's law）**と言う。

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

ここに、 F はクーロンの法則に従う力の大きさを表し、この力、或いはこの法則に従う力の総称のことを**クーロン力（Coulomb's force）**或いは**静電気力（electrostatic force）**という。¹また、 q_1 、 q_2 は二つの点電荷の電気量の大きさ、 r は二つの点電荷間の距離、及び k は比例定数である。²

式(2.1)の k に関して、二つの点電荷が真空中に存在しているとき、本書では k_0 として記述することにする。³以後、本書でクーロンの法則と言えば、

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.2)$$

のことを意味している。日本語でクーロンの法則を説明するとすれば、次のようになる。

- 真空中の二つの点電荷の間に働く力の大きさは、それぞれの電気量の大きさの積に比例し、点電荷間の距離の2乗に反比例する。

¹クーロンとはフランスの物理学者の名前であり、18世紀後半（フランス革命の数年前）静電気力を測定し、この法則を発見した物理学者の一人である。この法則名や電荷の単位にその名が付けられている。

² k は、比例定数といっても次元を持った量であり、二つの点電荷の単位、二つの点電荷間の距離の単位、及び力の単位に応じて、その数値が変更されることに留意せよ。

³二つの電荷が一樣な物質中に存在している場合には、この k の値が電荷を取り巻く物質によって異なると始めから記述されている文献もあるが、そのような状況は正確に言えば二つの電荷から成る系ではなく、マクロな系（二つの電荷を取り巻く物質はたくさんの粒子から構成されていて、それらを含めて考えている系）である。本書では、まずミクロの本質論的な系で定義することから始める。

なお、クーロンの法則と言った場合、他の内容を指す場合もあるので、本法則の事を**静電気力に関するクーロンの法則**とわかりやすく言う場合もある。

SI単位系では、即ち、電荷の単位をクーロン[C]、長さをメートル[m]、力をニュートン[N]とする場合、真空中における静電気力に関するクーロンの法則の比例定数は2桁の精度で

$$k_0 = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (2.3)$$

である。

力はベクトル量であるので、大きさだけではなく向きもある。そこで、点電荷が受けるクーロン力には、次に示すような、向きに関する内容がクーロンの法則に付随して含まれている。

- クーロン力は、2つの点電荷を結ぶ直線方向に働く。二つの点電荷の電気量が同符号のときには斥力、異符号のときには引力が働く。

2.2 万有引力とクーロン力

水素原子は陽子と電子からなる原子であるが、陽子も電子も質量と電気量の両方を持っている。従って、水素原子の陽子と電子との間には、万有引力もクーロン力も働いている。ここでは、それらの値がどのくらいであるか計算することにより、万有引力とクーロン力のバランスに関して、例題を通して実感しておく。

(例題)

水素原子における陽子と電子の間の万有引力とクーロン力の比を求めよ。

陽子の質量 m_p は、 $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、

電子の質量 m_e は $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、

電気素量 e は、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、

万有引力定数 G は、 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 、

クーロン力の比例定数 k_0 は、 $k_0 = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ 、

電子と陽子との間の距離 r は、 $r = 0.5 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)

とする。⁴

⁴比を出すだけならば、陽子と電子との間の距離は必要ない。しかし、水素原子の直径が大体 1 \AA であると常識として憶えておくと良い。なお、 \AA はオングストロームと読

(解答)

万有引力を F_G 、クーロン力を F_C とすると、

$$F_G = G \frac{m_p m_e}{r^2},$$
$$F_C = k_0 \frac{e^2}{r^2}$$

であるので、具体的に数値を代入すると、

$$\frac{F_C}{F_G} \approx 10^{39} \quad (2.4)$$

となる。

宇宙には、中性子星のように、そのほとんどの物質が原子という状態で存在していない場所もあるが、地球上ではほとんどの物質は、原子からできていると考えて良いであろう。また、地球上の全ての種類の原子において、原子核と電子との間のクーロン力と万有引力の比を考える際、水素をそれらの代表と考えて何ら差し支えない。なぜならば、上の例題の計算より明らかなように、水素原子における陽子と電子との間のクーロン力は、万有引力に比べてとてつもなく大きいから、水素でも、水素以外の原子（原子核に多くの陽子と中性子が存在している）でも、クーロン力が万有引力に比べて非常に大きいことに変わりはないからである。従って、1個の原子に関して、その原子核と電子との間の力の大きさを考える際に、万有引力を無視しても何ら差し支えないことがわかる。従って、分子を構成している原子間の力を考える際にも、クーロン力だけで、万有引力を考える必要がないこともわかるであろう。但し、アボガドロ数のような非常に大きな数の原子数が存在し、その集合体と地球との間の万有引力となると、無視することができなくなる。

ここで、次のようなことも考えて欲しい。例えば、今読者が使用しているこの本には形がある。今、読者は、手にペンを持っているかも知れないが、そのペンにも形がある。このように、様々なものは形を作っているが、それらは原子が集まって作られているものであり、原子が集まっているのは、クーロン力が働いているからである。そして、このように、地球上で本やペンのような形が作られて存在しているのは、それらを作

む。また、陽子（中性子）の質量は2桁の精度で電子の質量の1800倍であることも常識として知っておくべきである。

ている原子間のクーロン力が、それらの原子と地球との間の万有引力よりも遙かに大きい力であるからである。

2.3 基本的な力

前節で、万有引力とクーロン力の力のバランスに触れることができた。この節では、万有引力やクーロン力のような基本的な力に関することに触れておこう。

電荷間に働くクーロン力の他に、磁石の間で働く力があることを、読者は経験的に知っていると思う。電磁気学では、電気の力と磁気の力を統一的に扱うことに成功していて、この力のことを**電磁気力**と呼んでいる。電磁気力は、原子1個レベルで考えるならば、万有引力に比べて圧倒的に大きい。万有引力と電磁気力の2種類の力は、古典力学の範囲で扱う最も基本的な力と考えて良い。

原子核の大きさは、大体 $10^{-15} \sim 10^{-14}\text{m}$ である。これは、ラザフォードによる α 線の散乱の実験（ガイガー・マースデンの実験）[3], [4], [5] から明らかになっている事実である。この中に、陽子と中性子が存在しているので、陽子や中性子の大きさは原子核よりも更に小さい。今、水素原子を考えると、陽子と電子の間の距離は $5 \times 10^{-11}\text{m}$ 程度なので、陽子と電子との間はほとんどが空間であることがわかるであろう。他の原子も大体同様である。

ここで、科学的なものの見方がしっかりとできている人には、大きな疑問が湧いてくるはずである。原子核は、非常に小さいと実験事実からわかったが、その中に陽子と中性子が入っているのは、クーロン力が万有引力に比べてはるかに大きいことからするとおかしいのではないかという疑問である。陽子は正電荷であって、互いにクーロン力で反発するので、万有引力がそれよりも大きくなければ、原子核は存在できないはずである。従って、原子核を存在せしめているのは、万有引力や電磁気力ではない他の力なのではないか、と想像される。⁵実際に、原子核内部では万有引力や電磁気力と異なる力が存在していることがわかっており、**核力**と呼ばれている。⁶ なお、本書では原子核の内部に立ち入ることは

⁵実際に、このような想像から仮説を作り、それを実証していくことで科学は発展してきた。既存の考え方の限界を知り、その限界を克服する新たな考え方を見出していくという、正統的な科学的考え方をここで改めて意識して欲しい。

⁶原子核の中の世界には、古典力学では基本的に言及することがないので、本書の範囲では、基本的な力は万有引力と電磁気力と考えてよい。なお、不安定な原子核が崩壊

しないので、核力に触れることはない。

2.4 重ね合わせの原理

実際に調べたい系（着目する系）があるとき、その系は、水素原子1個のように陽子1個と電子1個だけから構成されているわけではない。着目している系には、複数の陽子と複数の電子が存在していることが一般的である（生体分子に着目するとすれば、たとえ1分子であっても複数の陽子と電子が存在している）。ある一つの電荷が受けている力を知るためには、その電荷と、それ以外の全ての電荷との間のクーロン力を考えなければならない。そして、**力はベクトル量である**ので、各々のクーロン力をベクトル量として全て足し合わせることを考えなければならない。全て足し合わせたときできる一つの合成されたベクトルが、その電荷にかかる実際の力である。このように考えることが可能であることを、**重ね合わせの原理が成立している**と言う。一般に、多数の独立な力が作用するとき、個々の力の和が作用するのと同様であることを、**重ね合わせの原理**という。これは、力だけでなく、物理量がベクトル量であるときに適用される一般原理である。

2.5 分子間力など

分子の構造式などでは、分子の構成要素である原子と原子を線でつないでいる。この線は現実に実体があるのではなく、共有結合を示している。この共有結合を正しく理解するには、量子力学を適用させなければならないが、定性的に考えるならば、この結合は電子と陽子、電子と電子、及び陽子と陽子との間のクーロン力の重ね合わせに基づくものである。

核酸やタンパク質などの生体分子は、共有結合よりも弱い結合が、一つの分子内や、分子間で見られる。この弱い結合は、結合の仕方や性質によって分類され、それぞれ、静電相互作用、ファンデルワールス力、水素結合、疎水性相互作用、などと名前が付けられている。これらは、分子を構成している電子の分子内での存在分布が原因となって生じたり、場合によっては電子が他の分子に移動することで生じる、共有結合に比べて弱い結合である。正しく理解するには共有結合と同様やはり量子力学をするときに放射線が放出される現象に関しては、放射能とガンの因果関係などを考える際に必要となる放射線領域の知識である。

適用して考える必要があるが、基本的には複数の電子と陽子で作られている系において、クーロン力の重ね合わせで生じる相互作用である。従って、分子間力に関して、「分子間に根源的に存在する力であって、クーロン力とは別種類の力である」、と考えるのは間違った考え方である。

第3章 電場と電気力線

3.1 近接作用と電場

真空中に二つの点電荷だけが存在している系を考えてみよう。二つの点電荷は陽子と電子と考えてもらっても一考にかまわない。二つの粒子を区別するために、それぞれ、1番目の粒子、2番目の粒子と名前を付けておく。今、2番目の粒子が受ける力は1番目からのクーロン力であると考えられるので、そのことをわかりやすくするために、 $F_{2\leftarrow 1}$ と記述することにしよう。すると、クーロン力の大きさは、これまで勉強してきた内容から次のように記述することができる。

$$F_{2\leftarrow 1} = k_0 \frac{q_1 q_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \quad (3.1)$$

ここに、 q_1 及び q_2 は、それぞれ1番目の点電荷の電気量及び2番目の点電荷の電気量、 \mathbf{r}_1 及び \mathbf{r}_2 は、それぞれ1番目の点電荷の位置ベクトル及び2番目の点電荷の位置ベクトルを示している。 $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ は1番目の点電荷の位置を始点、2番目の点電荷の位置を終点とする位置ベクトルであり、分母部分はそれを2乗しているのので、1番目と2番目の点電荷間の距離の2乗を表している。

式 (3.1) は、次のように説明することができるだろう。

- 2番目の点電荷は、1番目の点電荷と $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ 離れて存在しているときに、直接的に $F_{2\leftarrow 1}$ という力を1番目の点電荷から受ける。

このような説明は、点電荷を質点と考えた場合、万有引力にもあてはまる説明である。万有引力に関して、ニュートンは正にこのように考えていた。しかし、そうではなく、次のように考える研究者も存在した。

- 二つの点電荷を取り囲む空間には、力を伝搬する何かが存在している。1番目の電荷の存在は、1番目を取り囲む周囲の空間に影響を与え、伝搬する何かによって2番目の電荷の位置までその影響を伝

え、2番目の電荷は、2番目の電荷自身が存在している空間から力を受ける。

上述した二つの考え方の内、空間を隔てて直接的に力を及ぼすことを遠隔作用 (action at a distance)、また、空間中の何らかの媒質を通じて力が伝わることを近接作用 (action through medium) と言う。この二つの描像に関して歴史的にも長い間論争があった。現在では、近接作用が真実であると考えられている。当初、近接作用における媒介物質は、エーテル (ether) と呼ばれていたが、現在ではエーテルは存在せず、空間自身の性質であると理解されている。¹

クーロン力が、遠隔作用ではなく、近接作用であるとすると、式 (3.1) は、次のような二つの式で記述することが妥当である。

$$F_{2 \leftarrow 1} = q_2 E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (3.2)$$

$$E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = k_0 \frac{q_1}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \quad (3.3)$$

ここで、式 (3.3) は、 $E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ という量を定義している式であり、 $E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ は、電気量 q_1 の1番目の電荷が2番目の電荷の位置に影響を与えている量 (物理量) である。そして、式 (3.2) は、電気量 q_2 の2番目の電荷が $E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ から力を受けていることを意味している。

次に、クーロン力はベクトルであるから、向きにも言及した記述方法を考えてみよう。 q_1 と q_2 が同符号の電気量であれば、 q_2 が受ける力の向きは、 q_1 と q_2 を結ぶ直線方向で、 q_1 とは反対側の向きである。また、 q_1 と q_2 が異符号の電気量であれば、 q_2 が受ける力の向きは、 q_1 と q_2 を結ぶ直線方向で、 q_1 側の向きである。このことを考慮して、式 (3.2) と (3.3) をベクトルで記述すると、次のようになる。

$$\mathbf{F}_{2 \leftarrow 1} = q_2 \mathbf{E}(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = k_0 \frac{q_1}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (3.5)$$

式 (3.5) の最後に、 $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ 方向への単位ベクトルをかけてスカラー量からベクトル量にした形となっていることを確認して欲しい。式 (3.5) で定義される $\mathbf{E}(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ のことを、点電荷 q_1 が r_2 の位置に作る静電場という。

¹万有引力に関しても、一般相対性理論によって、やはり近接作用であると理解されるようになった。

今、静止している二つの点電荷を利用して静電場の定義を行ったが、もう少し拡張した立場から一般的な電場と静電場を定義しておこう。電気的な力が作用する仕方は近接作用であり、1番目の点電荷が静止していない場合でも、1番目の点電荷はその周囲の空間に影響を及ぼし、2番目の電荷はあくまでも自身の位置から力を受ける。その媒介となっているのが電場 (electric field) である。²つまり、「電荷の周囲には電場が生じ、その電場は別の電荷に力を及ぼす」ということである。また、時間的に変化しない電荷分布により生じる電場のことを、特に静電場 (electrostatic field) という。

電場はベクトル量であるので、重ね合わせの原理が成立する。例えば、複数の電荷が存在している場合であれば、空間におけるある点の静電場は、全ての電荷に関して、式 (3.5) を足し合わせればよい。即ち、 \mathbf{r} という位置の静電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i k_0 \frac{q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (3.6)$$

である。³

この節の最後に、電場の単位を示しておく。式 (3.4) から理解されるように、電場は、力を電荷で割ったものである。SI 単位系では、力の単位はニュートン [N] であり、電荷の単位は [C] であるから、SI 単位系における電場の単位は、[N/C] ということになる。⁴

式 (3.4) において、 q_2 の電気量が +1C であれば、2番目の電荷が受ける力は、1番目の電荷が2番目の位置に作る電場と、単位を除いて数値の部分が一一致するので、「空間の各点での電場は、その位置に +1C の電荷⁵があると仮定したときに、その電荷に作用する力」としばしば表現される。但し、電場はあくまでも力ではなく、力とは質の異なる物理量⁶であるので、その点は注意しておく必要がある。

問い電気量 2.0×10^{-6} C の点電荷から 3m 離れた位置における電場の大きさは何 [N/C] か。また、電場の向きも答えよ。但し、クーロン力の比

²厳密に言えば電磁場ということになる。ここでは、とりあえず電場だけを考えて議論を進めていく。

³静電場 \mathbf{E} は、 q_1 及び複数の \mathbf{r}_i の関数でもあるが、 \mathbf{r} の位置に作る静電場を強調するために敢えて省略してある。

⁴後に、V/m も電場の単位であることが示される。即ち、[N/C] = [V/m] である。

⁵このような定義をする際に使われる +1C のことを試験電荷と言う。

⁶電場は力とは次元が違うことを意識せよ。

例定数を $k_0 = 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ とする。

3.2 逆2乗則の特徴

この節でも前節と同じように、真空中で二つの粒子から成る系を例に挙げて、考えを進めていく。記号も前節の記号を使用する。二つの粒子は、質量も電気量も備わっているとしよう。2番目の粒子が1番目の粒子から受ける万有引力の大きさとクーロン力の大きさは、それぞれ次のようになる。

$$F_{2 \leftarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \quad (3.7)$$

$$F_{2 \leftarrow 1} = k_0 \frac{q_1 q_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \quad (3.8)$$

万有引力もクーロン力もどちらも、二つの粒子の間の距離の2乗に反比例している形となっているので、**逆2乗則**とすることができる。

なぜ、基本的な力が逆2乗則になっているのか、ここに何か重要なことが隠されているのではないかと、読者は知的好奇心が沸かないであろうか。尤も、これに対する明確な答えを用意している訳ではないが、ここでは、逆2乗則の特徴を考えてみたい。ここでは、クーロン力だけにしぼって説明してみる。

近接作用の考え方からすれば、式(3.8)は、次のように電場を使って記述された。

$$F_{2 \leftarrow 1} = q_2 E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (3.9)$$

$$E(q_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = k_0 \frac{q_1}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} \quad (3.10)$$

ここで、1番目の電荷から、四方八方に半直線が出ているような状況を想像して欲しい。線はどの方向にも均等に出ているとする。図3.1は、わかりやすくするために2次元で表現しているが、実際は3次元で全ての方向に線が出ている状況を考えて欲しい。そして、この線の本数は、電気量 q_1 の大きさに比例していると考えてみよう。即ち、電気量が大きければ線の本数は多くなり、電気量が小さければ線の本数は少なくなる。電気量の大きさが線の本数として表されているイメージである。図3.1に描かれているように、中心に電荷 q_1 があり、その中心から半径 r の球面上(図3.1では2次元になっているため円となっているが)に関して考えてみる。この球面を突き抜けている線の本数(図3.1では、2次元のため、

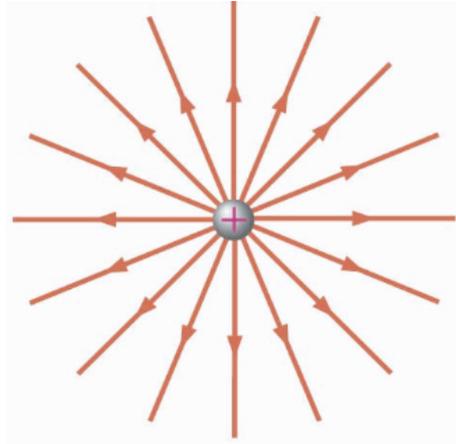


図 3.1: 逆 2 乗則の特徴を表現するための図

線と半径 r の円との交点の数であるが、3次元では線と半径 r の球面との交点の数は、電気量 q_1 から出ている線の本数と全く同じである（半直線は他に逃げようがないから）。ここで、球面上を貫いている半直線の面密度（単位面積当たりの本数）を考えてみよう。中心から半径が 2 倍になると、球面の面積は半径の 2 乗に比例するから 4 倍となる一方、貫く線の本数は半径が 2 倍になっても変わらない。従って、半径が 2 倍になると、面密度は 4 分の 1 となる。半径が n 倍になると、面密度は n^2 乗分の 1 となる。

球面上の電場の大きさは、正に、上のように考えた線の面密度となっている。上の例では線を考えたが、別に線でなくてもよい。中心に置いた点とみなした物体から、粒子が四方八方に均等に、また単位時間当たり一定に等しい速さで出ていると考えれば、本質的な違いはない。その場合は、単位時間に飛んでくる粒子数の面密度が半径の 2 乗に反比例していることになる。

ここで、「半直線の面密度」に関して、もう少し明確に定義をしておくことにする。上の議論で考えた面密度とは、半直線に対して垂直な面を考えている。従って、ある位置の電場の大きさを考える際に、その位置の周辺の微小面積を考え、その微小面積はあくまでも半直線に対して垂直な微小面積を考えなければならない。そして、その微小面積を貫く半直線の本数を、その微小面積で割った量が、ここで言う「半直線の面密度」

である。⁷以後、本書では、この定義を意味する用語として、「半直線の面密度」という言葉を用いる。

以上より、逆2乗則とは、ある「点」とみなした物体から、その物体に属している固有の何らかの量（質量や電気量などのような量）に比例した半直線が、空間的に均等に出ていると考えたときの、その「半直線の面密度」に対して成立している法則であるということである。そして、逆2乗則で表現されている、電場の大きさは、正に点電荷が空間に出している「半直線の面密度」に比例した量であると考えられることができることがわかる。

このように、電場に関して、「半直線の面密度」という形でイメージすることができたが、実はこのようなイメージは、電場の大きさを議論する際に非常に役に立つことがわかっている。

3.3 電気力線

電場の中で、ある位置に正の点電荷（正電荷）を置き、そこで電場から受ける力の向きに微小距離だけその正電荷を動かす。この操作を繰り返すと、点電荷の動いた軌跡が描けるが、その線に動いた向きに矢印をつけたものを**電気力線**と、とりあえず定義する。電気力線を、言葉で正確に定義することは非常に難しいのであるが、この定義において、正電荷を微小距離動かす距離を小さくすればするほど、より正確な電気力線を表すことになる。

電気力線の定義から、電気力線上の任意の点に正電荷を置き、その位置で電気力線の接線を引くと、正電荷は接線の方に力を受ける。正電荷が受ける力の向きは正に電場の向きである。但し、電気力線は電場の様子を視覚的に理解しやすいように描かれたもので、実体があるわけではなく、あくまでも電場を把握しやすく表現したものである。

図3.2は、点電荷が1個の場合と、正と負の点電荷がそれぞれ1個ずつ存在している場合の電気力線の例を描いたものである。図で描かれたものと、本節の始めに書かれてある電気力線の定義を整合させて、電気力線を理解して欲しい。

電気力線には、次のような性質もある。

⁷数学的に言えば、更にその微小面積の極限を考えて、微小面積における「半直線の面密度」から、ある位置における「半直線の面密度」として捉える。

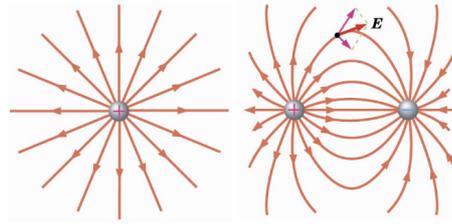


図 3.2: 電気力線の例

- 電気力線は正電荷から出て負電荷に入る。電荷のないところで発生したり、消滅したりしない。
- 電気力線上の各点での接線は、その点における電場の方向であるから、電気力線は折れ曲がったり、枝分かれしたり、交差したりしない。
- 電気力線は、電荷の大きさに比例した本数が、正電荷から出て負電荷に入るように描かれなければならない。これによって、ある場所の電気力線の密度は、その場所の電場の大きさに比例する。即ち、電場の大きさが大きい所ほど、電気力線は密である。

問い電気力線が交差しているとしたら、どのような矛盾が存在するか答えなさい。

図 3.2 の点電荷 1 個が作る電気力線は、前節で逆 2 乗則の観点によって、点電荷から周囲の空間に、方向に関して均等に、その電気量に比例した数の半直線を出している描像と全く一致している。半直線を電気力線と置き換えて考えても何ら差し支えることはない。

次に、真空中に $+q$ という電気量を持つ点電荷が 1 つだけ存在している状況を考え、この点電荷から電気力線が何本出ているかに関して考えてみよう。その電気力線の本数を N 本とすると、

$$N = k'q \quad (3.11)$$

と書くことができる。但し、 k' は比例定数である。また、電気量 q の点電荷を座標の原点とし、原点から r 離れた位置に作る静電場の大きさは、

$$E(\mathbf{r}) = k_0 \frac{q}{r^2} \quad (3.12)$$

である。前節の議論から、電場の大きさは「半直線の面密度」に比例した量として与えられるが、まず、半直線の部分を電気力線と言い換えておこう。即ち、「電場の大きさは「電気力線の面密度」に比例した量として与えられる」、となる。次に、「比例した量」という部分を変更して、「電場の大きさは「電気力線の面密度」として与えられる」、という記述になるように、正電荷 $+q$ から出る電気力線の数の方を定義することを考えよう。即ち、式 (3.11) の k' の値を、「電気力線の密度」がそのまま静電場の大きさとなるように決めようという訳である。

半径 r の位置における「電気力線の面密度」は、点電荷から出ている電気力線の本数 N を、半径 r の球の表面積で割った値である。また、半径 r の位置における電場の大きさは、式 (3.12) である。これら二つが等しくなることを式で記述すれば、

$$\frac{k'q}{4\pi r^2} = k_0 \frac{q}{r^2} \quad (3.13)$$

であるから、結局、式 (3.11) の k' の値は、次のようになる。

$$k' = 4\pi k_0 \quad (3.14)$$

即ち、

- 点電荷 $+q$ から出ている電気力線の本数を $4\pi k_0 q$ 本とすれば、「電気力線の面密度」は電場の大きさとなる。

以上の定義に基づいて、次に、複数の電荷からなる系や大きさのある物体に電気が分布しているような系の場合に、電気力線の考え方がどのように適用できるかを考えてみよう。それらの系は、一般に複数の正電荷と負電荷が含まれている。一見複雑なようにも思えるが、電気力線の性質から、電気力線は正の電荷から出て、負の電荷へ入り、それらは途中で消滅することなく、枝分かれなどもしないのであるから、系全体の電気量が Q であれば、系を含む球を考え、その球面を貫いている正味の電気力線の本数は、 $4\pi k_0 Q$ 本と考えられる。ここで、 $4\pi k_0 Q$ の値が正の場合は、球の内部から外部への向きの電気力線の本数を、負の場合は、球

の外部から内部への向きの電気力線の本数を表す。但し、ここで記述している正味の電気力線の本数とは、次のようなことを意味している。考えた球の中には、正電荷と負電荷が両方存在し、正の電荷からは電気力線が出て、負の電荷には電気力線が入っている。それらの電気力線の中には、考えた球の球面を一端出て、再び球面内に入る電気力線も含まれているが、正味の電気力線の本数という場合には、それらをキャンセルして考える。まとめると、

- $+Q$ の帯電体から出る正味の電気力線の本数、或いは $-Q$ の帯電体へ入る正味の電気力線の本数は $4\pi k_0 Q$ 本である。

このことを、（電場における）ガウスの法則⁸と言う。

電場におけるガウスの法則を利用すると、簡単な計算で電場を求めることができる場合がある。次に例題の形式でそのことに触れる。結果は、電気回路のコンデンサーの箇所で利用するので、例題を考えることは必須である。

（例題）

無限に広い平面に、面密度（単位面積当たりの密度） $\sigma > 0$ の一様な電荷分布が存在しているとき、その平面から距離 r 離れた位置の電場を求めよ。なお、空間は真空と考える。

まず、任意の1点（図3.3において、矢印の始点の位置）に着目する。ここで、図のような方向の電場、即ち平面に対して垂直以外の方向の方向のベクトル量としての電場は、あり得ない。なぜならば、任意の1点の電場は平面上にある電荷から影響を受けるが、どの方向からも均等な条件にあるからである。このことを、しばしば「対称性がある」、と言う。もし、電場の方向が平面から垂直方向でなければ、この対称性の条件と矛盾してしまうことになる。従って、平面上の電荷分布が一様で正であるならば、空間上のある点の電場の方向は必ず平面と垂直で、平面と反対側を向いていることになる。

次に、図3.4のように、電荷分布の存在している平面に平行な円柱（側面の途中で平面が円柱を切るような円柱）を考えよう。そして、円柱の

⁸正確にいうと、もう少し深い意味合いを含んだものをガウスの法則と呼ぶが、この教科書の範囲ではこのことをガウスの法則と呼んでおく。詳しくはより詳しく書かれた電磁気学の教科書 [?],[?],[?]などを参考にするとよい。



図 3.3: 無限に広い平面に一様な電荷分布がある場合の電場の方向に関して

底面の面積を S とする。すると、円柱内部に入った平面に存在する全電気量 Q は、 σS である。この電気量 Q が作る電気力線の方向は、電場の方向であるから、円柱の側面を貫くことはない。従って、円柱を貫く電気力線は、円柱の上下の底面にあたる部分だけとなる。ガウスの法則より、 Q より出る電気力線の総数は、 $4\pi k_0 Q$ 本である。また、電場の大きさは、電気力線の面密度であるから、底面部分の電場の大きさ E は次のようになる。

$$E = \frac{4\pi k_0 Q}{2S} = \frac{4\pi k_0 \sigma S}{2S} = 2\pi k_0 \sigma. \quad (3.15)$$

円柱の高さがどのような長さでも、電気力線の貫く本数は変わらないから、平面からの距離に関係なく、無限に広い平面が作る電場の大きさは、 $2\pi k_0 \sigma$ であることになる。なお、この議論において、円柱を利用したが、円柱でなくても側面が平面に対して垂直であればよい。円柱を利用したのは、全ての方向から対称性があることを強調したかったからである。

また、平面上の電荷が負の場合は、電場の向きだけが逆になる。

問い無限に長い直線上に、線密度（単位長さ当たりの密度）が $\lambda > 0$ の一様な電荷分布が存在しているとき、その直線から距離 r 離れた位置の電場を求めよ。なお、空間は真空と考える。

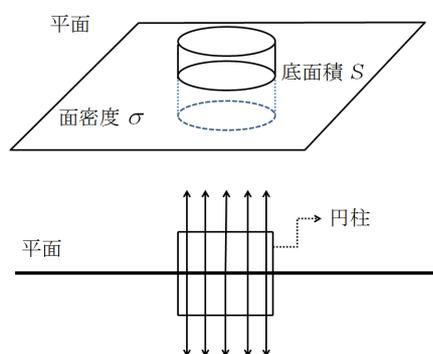


図 3.4: 無限に広い平面に一樣な電荷分布がある場合の電場の大きさに関して

第4章 電位

4.1 クーロン力によるポテンシャルエネルギー

重力がする仕事と同様に、クーロン力（静電気力）がする仕事も途中の経路に無関係である。これは、クーロン力（静電気力）と万有引力が同様の形をしていることから理解できるであろう。即ち、クーロン力も保存力である。従って、重力を受ける物体について、重力によるポテンシャルエネルギーが考えられたように、クーロン力を受ける物体についても、ポテンシャルエネルギーを考えることができる。このポテンシャルエネルギーのことを、**クーロン力によるポテンシャルエネルギー**と言う。

ここで、重力によるポテンシャルエネルギーと対比させる形で、クーロン力によるポテンシャルエネルギーの定義を図で示しながら説明する。図4.1のように、下向きの重力加速度 g が生じているとき、高さ 0 （基準面）にある質量 m の物体を、準静的に（重力と同じ大きさで反対向きの力を加えて、つり合いを保ちながら非常にゆっくりと）高さ h の地点まで運ぶことを考える。このとき、系（この場合は物体1個）に対して、重力と反対向きに加えた力がした仕事は mgh である。¹ また、物体は、自然に働いている力（この場合は重力）と反対向きの力によって、基準面から高さ h までされた仕事だけ、基準面よりも大きなポテンシャルエネルギーを持つという。但し、その値がマイナスの場合は、基準面よりもポテンシャルエネルギーは小さいことになる。

従って、物体は、自然に働いている力（この場合は重力）の向きから反対の方向へ行けば行く程、より大きなポテンシャルエネルギーを持つということになる。例として水力発電を考えてみよう。水力発電で、水を高い位置にポンプでくみ上げれば、ポンプが水にした仕事の分だけ、水は高いポテンシャルエネルギーを持つことになる。力は、ポテンシャルエネルギーの高い所から低い所へ向かって働く。そのため、水は下向きに力を受け、重力以外に水に力が働かなければ、水は下に向かって流れ

¹この部分がすぐにわからない人は、力学の仕事の定義の箇所を確認せよ。

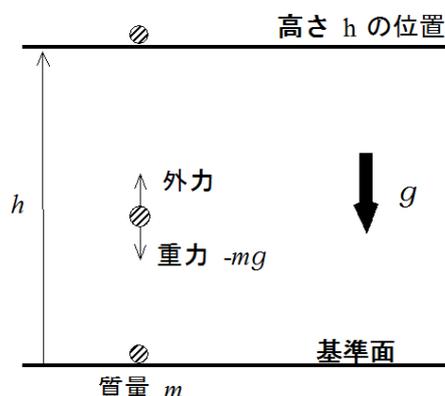


図 4.1: 重力によるポテンシャルエネルギーを説明するための図

ることになる。このときに、水の力でタービンを回せば発電することができる。水のポテンシャルエネルギーが、タービンの回転エネルギーへと変化したことになる。夜の余った電力で水を高い位置にくみ上げ、電力が必要なときに水を流してタービンを回すことが、典型的な水力発電の方法の一つである。

次に、図 4.2 のように、下向きの一様な電場 \mathbf{E} が生じている場において、基準面にある電気量 $q (> 0)$ の点電荷を、準静的に基準面から距離 d だけ離れた位置まで運ぶことを考える。このときの点電荷は、図 4.1 の物体と状況が似ている。クーロン力 $q\mathbf{E}$ (成分で記述すれば、上向き正に座標を選んでいるとして、 $-qE$) と反対向きに同じ大きさの力を点電荷へ作用させるとき、その力がした仕事は qEd である。このとき、距離 d の位置での点電荷は、反対向きに点電荷へ加えた力がした仕事だけ、基準面よりも高いクーロン力によるポテンシャルエネルギーを持つという。

クーロン力と反対向きに点電荷に加えた力が点電荷にする仕事 W は、 $dW = (-q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r}$ で定義されるから、クーロン力によるポテンシャルエネルギーを U とすれば、次のように記述される。

$$U = \int_0^d (-q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.1)$$

ポテンシャルエネルギーの基準の位置は、常にゼロの位置に選ぶとは限

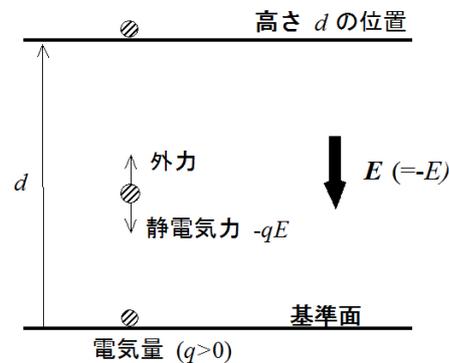


図 4.2: クーロン力によるポテンシャルエネルギーを説明するための図

らないので²、任意の位置 \mathbf{r} におけるクーロン力によるポテンシャルエネルギーは、一般的に次のように定義される。

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\text{基準点}}^{\mathbf{r}} (-q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

ここに、電場 \mathbf{E} は、一般的には一様（定数）であるとは限らず、電気量 q の点電荷が存在している位置に作られている電場（位置で異なる値を示す位置の関数である）を表している。

4.2 電位

ある位置に電気量 q の点電荷が存在するとき、その電荷の持つクーロン力によるポテンシャルエネルギー U は、式 (4.2) から明らかのように、電気量 q に比例する。また、クーロン力は遠隔力ではなく近接力であるから、この電気量 q に関係なく、電気量 q の位置で決まる物理量が存在しているはずである。式で表現した方がわかりやすいので、それを記述すると、次のようになる。

²後に出てくるが、クーロン力によるポテンシャルエネルギーの基準点は無限遠に選ぶことが一般的である。

$$U(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r})V(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{基準点}}^{\mathbf{r}} (-\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} \quad (4.4)$$

即ち、式(4.2)から、電気量 q を分離して、電気量 q の位置で決まる物理量が、式(4.4)の V である。そして、 $q(\mathbf{r})V(\mathbf{r})$ が、点電荷 q の持つクーロン力によるポテンシャルエネルギーである。もし、点電荷 q の位置に電気量 Q の点電荷が存在していれば、この点電荷の持つ、クーロン力によるポテンシャルエネルギーは、 $Q(\mathbf{r})V(\mathbf{r})$ ということになる。電場はベクトル量であるが、電位はスカラー量であることに注意して欲しい。なお、一次元の場合であれば、

$$V(r) = \int_{\text{基準点}}^r (-E) dr \quad (4.5)$$

となる。

この V のことを、その点の**電位 (electric potential)** と呼ぶ。電位の次元は、エネルギーの次元を電荷の次元で割ったものである。電位は、あくまでもエネルギーとは次元が異なる物理量であることに注意すべきである。また、電位の単位は、一般にボルト [V] (= [J/C]) が使われる。ボルトは、我々が日常、家庭などに来ている商用の電源に対して、その大きさのことを百ボルトと呼んでいるボルトのことである。身近な言葉としては、電圧という言葉を使用している場合が多いかと思われるが、電圧とは2点間の電位の差を指す言葉である。

次に、電位の定義を図で示しながら説明してみる。図4.3は、図4.2の基準面に置いた電荷の電気量をプラス 1C としたものである。下向きに電場 \mathbf{E} が生じている場において、基準面にある単位試験電荷 (+1C)³ を、準静的に距離 d の位置まで運ぶ。このとき、クーロン力と反対方向に単位試験電荷へ加えた力がした仕事（正確には、その仕事を +1C で割った物理量）が、基準面から距離 d 離れた位置の電位である。ここで、電位とはあくまでも位置に対して定義されている物理量であることに注意をすべきである。

³このような場合に用いる +1C のことをしばしば単位試験電荷と呼ぶ。

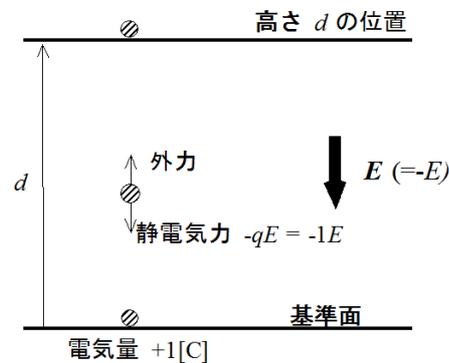


図 4.3: 電位の定義を説明するための図

4.3 電場と電位との関係

電位とは、位置で決まる物理量であった。そして、ある位置に電気量 q の電荷が存在するとき、その位置の電位 V との積 qV が、その電荷の持つクーロン力によるポテンシャルエネルギー U であることを、直前の二つの節で学んだ。また、積分の関係式 (4.4) を微分の関係で考え直せば、**電位の位置に関する傾きが電場** ということになる。即ち、今 1 次元で考えれば、

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.6)$$

という関係が成立し、3 次元で考えれば、

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (4.7)$$

となる。なお、図 4.3 の状況であれば、

$$E = \frac{V}{d}, \quad (4.8)$$

が成立していることになる。ここで、電場に関する単位を改めて考えてみると、電場の単位は S I 単位系で $[\text{V/m}]$ と記述されることがわかる。 $[\text{V}]$ は、 $[\text{J/C}]$ なので、 $[\text{V/m}] = [\text{J/mC}]$ と置き換えられ、 $[\text{J/m}] = [\text{N}]$ であるから、S I 単位系における電場の単位は $[\text{V/m}] = [\text{N/C}]$ と二つの表記が可能となる。

4.4 点電荷の周囲に作られる電位

前々節では電位の定義を示し、前節では電位と電場の関係を示した。本節では、1つの点電荷の周囲に作られる電位に関して眺めてみる。

今、原点に正の電気量 q の点電荷（以後、簡単に表すために正の点電荷 q というように記述する）が存在しているだけの系を考えてみる。このとき、原点から距離 r 離れた位置は、位置ベクトルで \mathbf{r} と表すことができる。この位置における電場は、

$$\mathbf{E} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.9)$$

と表される。今、電場はベクトルで表されているが、空間のどの位置も方向は関係なく、原点からの距離の1次元の関数と考えられるから、電場の大きさは

$$E = k_0 \frac{q}{r^2} \quad (4.10)$$

で、その方向は原点から遠ざかる方向である。電位の定義 (4.5) より、電位 V は、

$$V = k_0 \frac{q}{r} \quad (4.11)$$

となる。この式を図で示すと、図 4.4 のような双曲線のグラフとなる。点電荷の電気量が正の場合は左側のように第一象限の双曲線となり、負の場合には第4象限の双曲線となる。電場を積分する際に、基準点を無限遠（無限大）に選べば、積分計算の際に、無限遠での値がゼロとなり計算が楽になる便宜上、基準点を無限遠に取ることが多い。くどいようであるが、基準点はどこにとっても良いのであって、ポテンシャルエネルギーや電位という量は、2つの地点の差だけが意味のある量であることをここで改めて認識して欲しい。

次に、図 4.4 を眺めながら、次のことを考えて欲しい。原点に正の点電荷 q を固定し、もう一つの点電荷 Q を空間のどこかに置いたとしよう。原点には、正の点電荷が固定されているので、空間の電位は、図 4.4 の左図のようである。新たに置いた点電荷 Q が正の電荷であれば、その電荷の持つポテンシャルエネルギーは、図のグラフの値である電位の Q 倍であるから、縦軸をポテンシャルエネルギーとした場合でもグラフの形状は変わらない。従って、電荷 Q はポテンシャルエネルギーが低くなる方向

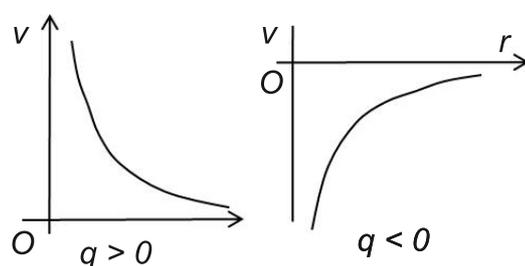


図 4.4: 点電荷の周囲の電位のグラフ

に力を受けるので、無限遠の方向に動こうとする。新たに置いた点電荷 Q が負の電荷であれば、縦軸をポテンシャルエネルギーとした場合、丁度図 4.4 の右図のような形状となるので、ポテンシャルエネルギーが低くなる方向、即ち原点の方向に力を受けて動こうとする。図 4.4 を眺めながら考えた力の方向は、同種の電気は退け合い、異種の電気が引き合うというクーロンの法則の性質と整合していることが確認できるであろう。原点に負の電荷を固定した場合も同様にして確認して欲しい。

問い $4.5 \times 10^{-6} \text{C}$ の点電荷から 4.0m 離れた位置の電位を、無限遠を基準点として求めよ。なお、クーロン力の比例定数 k_0 を $k_0 = 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ とする。

4.5 等電位線、等電位面

前節で、固定した点電荷の周囲に作られる電位を考えた。本節では、点電荷を空間においたときに、実際の電位のイメージを示す。本来空間は 3 次元であるが、3 次元空間の電位のイメージを描くことは困難であるので、2 次元平面上におけるイメージで説明する。読者は各自の頭の中で 3 次元のイメージに拡張して欲しい。

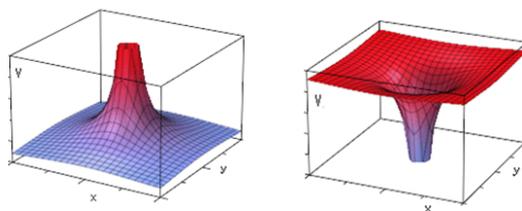


図 4.5: 2次元平面上で、一つの電荷によるの電位のイメージ

図 4.5 の左図は、正の点電荷 1 個を 2 次元平面上に置いたとき、その周囲の電位を 2 次元平面に対して垂直な方向の値として描いたものである。同様に、図 4.5 の右図は、負の点電荷 1 個を 2 次元平面上に置いたとき、その周囲の電位を 2 次元平面に対して垂直な方向の値として描いたものである。点電荷の位置を原点にして、原点を含む、この 2 次元平面に対して垂直な平面で切ったときに描かれる曲線は、丁度前節の図 4.4 で描いたような双曲線となる。

次に、2 次元平面上に 2 個の点電荷を置いたときに、それらの周囲の電位を同様の方法で描くと、図 4.6 のようになる。左側は、二つの同じ正電荷を置いた場合で、右側は正電荷と負電荷一つずつ置いた場合である。このように描いた図において、既に 2 次元平面上に置いた電荷が動かないと仮定し、この 2 次元平面上のある点に新たに正電荷を置くとすると、その正電荷は、置かれた点の近傍でより電位の低い方向へ力を受ける。逆に、負電荷を置くとすると、その負電荷は置かれた点の近傍でより電位の高い方へ力を受ける。言い換えると、点電荷を置いた点では、方向によって電位の傾きが異なるが、一番急な傾きの方向に力を受ける。正電荷の場合は、最大の傾きで下向きに、負電荷の場合は、最大の傾きで上向きに力を受ける。この電位の傾きこそが電場であったことを再確認して欲しい。

ここで、電位の大きさが同じ点を連ねて 2 次元平面上に線を描くと、丁度地図の等高線や天気図の気圧線と同じような図ができる。このとき、2 次元平面上のこの線のことを、**等電位線**と言う。等電位線の間隔が密な

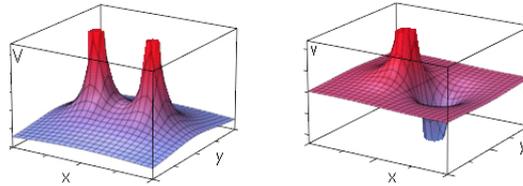


図 4.6: 2次元平面上で、二つの電荷による電位のイメージ

所は、電位の傾きが大きい所を示し、逆に等電位線の間隔が疎の所は、電位の傾きが小さい所を示している。電位の傾きは電場の大きさであるので、等電位線の密な所の方が電場の大きさが大きいことを意味している。

次に、等電位線と電気力線との関係を考えてみる。電気力線の接線方向は電場の方向でもあるので、電気力線に垂直な方向は電場の大きさが同じであることを意味している。電気力線上のある点において、その点の近傍で電場の大きさが同じ点を連ねれば、同じ電場の大きさである点を連ねることになるので、電位の変化のない部分を表現していることになる。即ち、同じ電位の値の点を連ねていることになり、この点の連なりは正に等電位線である。空間のどの点においても、その近傍で電気力線に垂直な点を連ねれば、それは等電位線であるということである。即ち、言い方を換えると次のようなことが言える。

- 等電位線と電気力線は必ず直交する。

図 4.7 の左図は、2次元平面上に二つの正の点電荷を置いたときの等電位線と電気力線を描いたものである。正の点電荷を置いた2点を中心としてその周囲を取り囲むように描かれた青い線が等電位線を示し、赤で描かれた線が電気力線である。また、図 4.7 の右図は、2次元平面上に正と負の点電荷を一つずつ置いたときの等電位線と電気力線を描いたものである。

最後に、3次元空間における電位に触れておく。考えやすくするために、点電荷1個の場合に限定して述べると、その点電荷1個の周囲に作

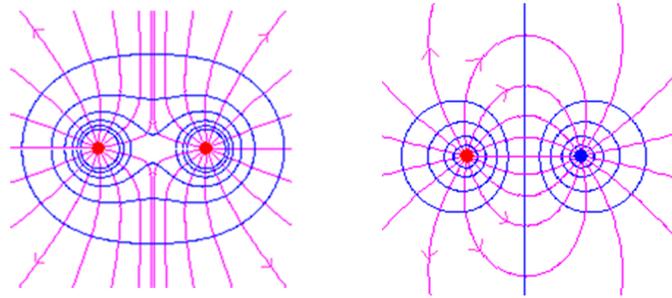


図 4.7: 二つの電荷によって作られる等電位線と電気力線の関係

られる等電位の大きさは、点電荷からの距離が等しい場所で一定であることは、これまで説明してきたことから明らかである。従って、等電位である場所は、球面となることが理解されるであろう。実際の3次元空間では、等電位となる点の集合は面となる。この面のことを、等電位面と言う。等電位面も電気力線と常に直交することは、等電位線と電気力線との関係の所で記述した議論と同様に理解される。

4.6 生体分子が作る電場と電位

本章では、これまでクーロンの法則、電場、電気力線、電位の定義を、点電荷が1個や2個を例にして説明してきた。しかし、実際に興味深い内容を有する生体分子などの系は、非常に多くの原子から成り立っている。二つの生体分子が分子間力によって結合したり、離れたり、また、分子内や分子間で電子の移動やエネルギーの移動を起こす機構も、クーロンの法則に基づいた力関係の重ね合わせによって引き起こされていると言っても過言ではない。

しかし、クーロンの法則に基づいていることはわかっているとしても、現象の具体的な因果関係がわからなければ、その現象を科学的に理解できたとは一般に言わない。現象の生じる因果関係を明らかにして初めて科学

的な理解がなされたと言える。また、科学的な理解がなされて初めて、その現象において鍵となっていた機構を他の工学分野で応用することが可能となったり、生命系においては、例えばタンパク質などの生体分子の構造と機能に基づいた創薬など、病気治療の発展に結びつくのである。

本節では、実際に、タンパク質の内部でどの位の大きさの電場が生じていて、電場が如何に生体機能と関係しているのか。また、生命現象を理解する上においても重要な物理量であるのかを、ロドプシンというタンパク質を例にとり示していく。読者は、生体で起こる現象に、電場がどのようにかかわっているのかを概観し、また、タンパク質内での大体の電場の大きさも憶えておくと思いたい。

ロドプシンは、視細胞のディスク膜と呼ばれる生体膜の中に存在している膜タンパク質である。図4.8の左図は、構造バイオインフォマティクス研究共同体 (RCSB; Research Collaboratory for Structural Bioinformatics) が管理している Protein Data Bank (略称 PDB) というタンパク質や核酸の3次元構造を蓄積したデータベースから、コード名 1u19 のデータに基づいて描いたロドプシンの3次元構造である。らせん状になっている部分は α ヘリックスと呼ばれるタンパク質によく見られる構造で、この α ヘリックスが7本存在し、この7本が図の上部と下部の部分でターンと呼ばれる構造の部分を通して結びついている。7本の α ヘリックス部分が、膜を貫いている部分で、上部と下部のターン部分は、膜の内外に出ている。

このタンパク質には、レチナールと呼ばれる小分子が結合している。図4.8の左図において、真ん中付近に赤で描かれているのがレチナールである。眼の中で初めて可視光と相互作用をするのは、このレチナールである。レチナール分子を構成する部分の中で、光のエネルギーを吸収するのは電子である。タンパク質を構成している各原子において電場に関与するのは、原子核に存在する陽子の正電荷と、その周囲に存在する電子の負電荷であるが、そらが作る電場環境の中にレチナールは存在している。このタンパク質を構成している各原子が作る電場は、クーロンの法則によってレチナールの電子構造に影響を与えている。レチナールの電子構造が変化すれば、光吸収する光の波長も変化する(異なる色の光を吸収するようになるということ)。例えば、レチナール付近に存在しているロドプシンのアミノ酸残基一つを異なるアミノ酸残基へとポイントミューテーションしたとすれば、レチナールは若干異なる波長の光を吸収するようになる。実際に、オプシン(ロドプシンからレチナールを除

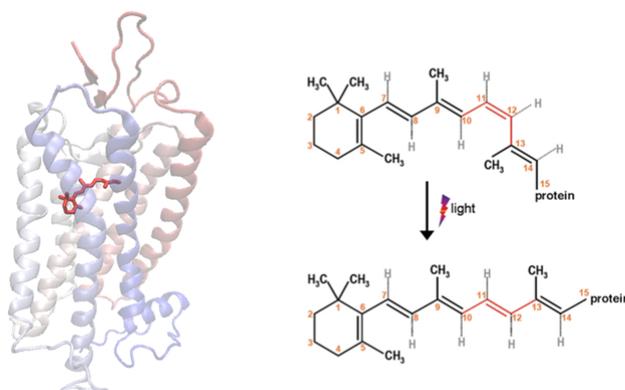


図 4.8: 光吸収前ロドプシンに関する X 線結晶解析構造の cartoon 表示 (左) とレチナールの光異性化前後の分子構造 (右)

いたタンパク部分だけのことをオプシンと言う) を構成しているアミノ酸の違いによって、異なる波長の光を吸収する幾つかの種類のおプシンが存在する (例えばヒトは赤色光、緑色光、青色光を受容する 3 種類)。異なる種類のおプシンは、異なる視細胞に存在していて、色を識別することができるのは、視細胞の種類ごとにレチナールの電子に影響を与える電場環境が異なっているからである。

レチナールは、光を吸収する前、図 4.8 の右図上のような構造 (11 シス型と言う) をしている。光を吸収すると、電子が吸収したエネルギーに相当するだけ高いエネルギー状態になって、その後、吸収した電子のエネルギーが原子核の振動エネルギーに変化しながら、およそ 100 フェムト秒のオーダーで、図 4.8 の右図下のような構造になる。その後、オプシン (ロドプシンのタンパク質部分) の構造変化がおこり、膜の外側に出ているターン部分の動きが、別のタンパク質の反応を引き起こし、引いては光が来たという情報が脳へ伝わっていく。

筆者は、以前、レチナールが異性化をする際に、レチナールの各原子の正味電荷⁴を計算して、その正味電荷の変化がレチナールの周囲のタン

⁴原子は中心に陽子の正電荷、その周囲に電子の負電荷が分布しているが、分子の電子状態を量子力学に基づいて計算をしてやり、原子を 1 個の点電荷とみなすとき、陽子の正電気量と電子の負電気量を合算して妥当と考えられる電気量のこと。イオンでなく

パク部分に、クーロンの法則に基づく影響を与えること、また、それがタンパク質の構造変化につながる可能性のあることを議論したことがある。そのときのデータをここで示して説明する。

図 4.9 を見て欲しい。11 シス型のレチナールを、図 4.9 のように xy 平面上に置き、 $C_{11} - C_{12}$ の共有結合部分を回転軸として環が付いている側を回転させる。そのときの回転角によって変化する、レチナールの各原子の正味電荷を計算し、それらの正味電荷が図 4.9 中の点 A, B, C の位置に作る電場を求めた。図 4.10 は、そのときの電場の x 成分の値である。図 4.10 の縦軸の単位は、 $[10^7 \text{V/cm}]$ であるが、これは $[10^9 \text{V/m}]$ である。この値はレチナールだけがその周囲に作る電場の大きさと考えられるが、実際は、周囲のタンパク部分からの電場もベクトル和で計算しなければならない。また、レチナールが異性化する際に、4.9 中の点 A, B, C の位置での電場そのものの値ではなく、構造変化を導く原因を探っているので、電場の変化量の方がより重要である。従って、図 4.10 からは、大きく見積もった場合に、 $1 \times 10^9 \text{V/m}$ という電場の x 成分の変化が生じていると考えて欲しい。

生体膜（脂質 2 重層）の厚さは、 $6 \sim 10 \times 10^{-9} \text{m}$ であり、静止膜電位は $70 \times 10^{-3} \text{V}$ であるから、生体膜の厚さを 10^{-8}m と見積もって、生体膜の幅で静止膜電位による平均的な電場の大きさは、 $7 \times 10^6 \text{V/m}$ ということになる。この平均的な静止膜電位に対して、タンパク質内部で作られる電場は 100 倍であることが重要なことである。⁵

さて、本章の最後に、 10^9V/m のスケールの電場がタンパク質を構成する原子にかかる時、それらの原子の正味電荷がどの程度変化するのを見積もっておく。タンパク質を構成している主な原子である炭素、窒素、酸素を取り上げる。電場をかける分子は、簡単な見積計算を行うために、ホルムアミドを選んだ。この計算結果を示しているのが、図 4.11 である。これによると、0.1a.u. 程度の正味電荷の変化があることを示している。この正味電荷の変化は、十分に分子の構造変化に影響を与えられる量である。

本章では、分子内で電子の分布が変化することによって作り出される電場が、如何に生命現象に強く関わっているのかを簡単に示したが、読者

でもプラスマイナスが生じている。ちなみに、酸素原子などは、分子を作っている周囲の原子から電子を引きつける傾向が一般的にみられ、マイナスになる傾向がある。

⁵膜の幅で電場を平均すれば、その幅の中で、様々な方向の電場が作られているために小さくなると考えられる。

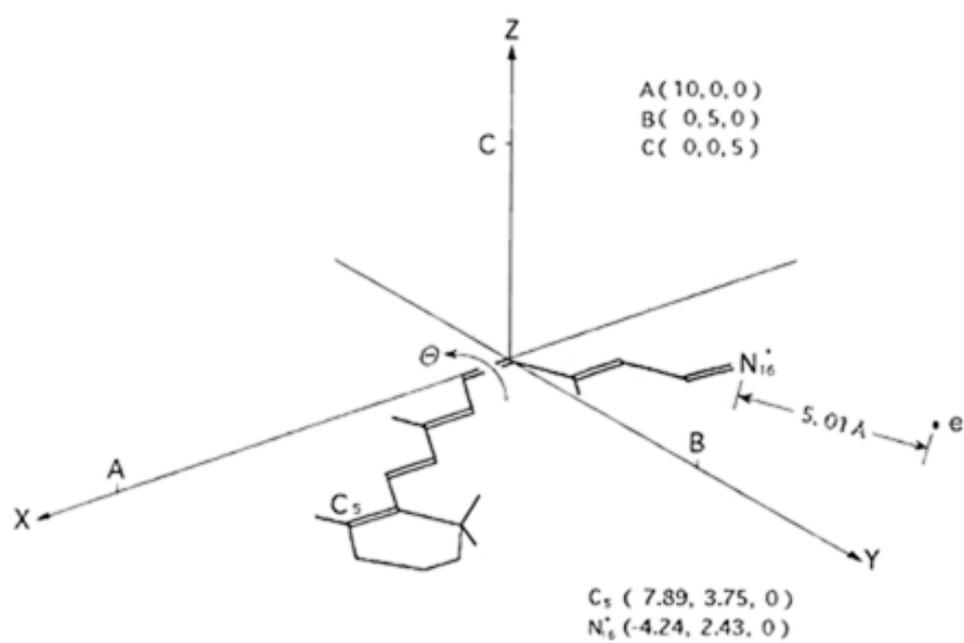


図 4.9: レチナールの異性化のモデル。11 シス型の構造を xy 平面上に置き、末端に環が付いている方を 180° ねじって全トランス型にしていくことを示している。

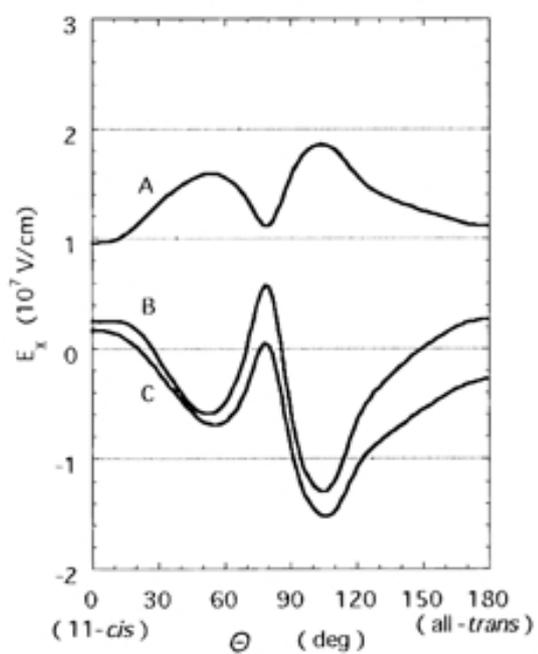


図 4.10: 図 4.9 で、レチナールの 11 シス型の構造から末端に環が付いている方を 180° ねじって全トランス型にしていく間に、図 4.9 中の点 A, B, C の位置に作られる電場の x 成分の値。

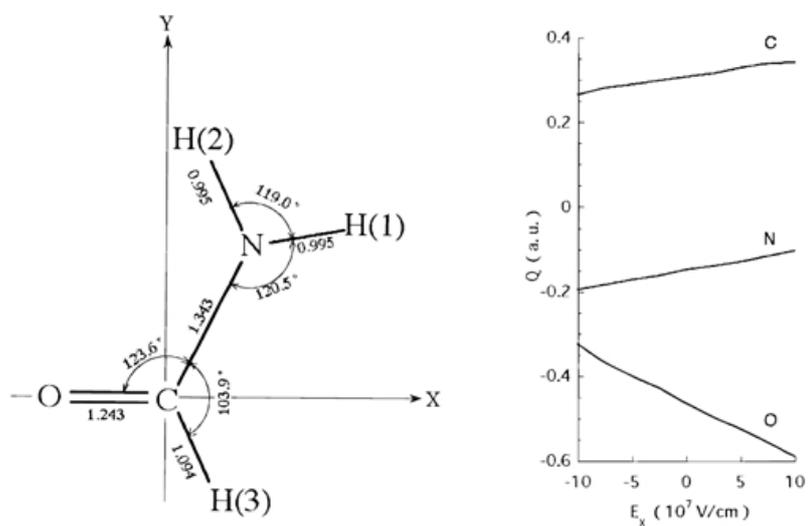


図 4.11: (左) xy 平面上で表現したホルムアミドという分子の構造を示したもの。長さの単位は \AA 。(右) 左図のホルムアミドに対して、 x 軸方向に電場を加えたとき、その電場の値に対して、炭素原子、窒素原子、酸素原子の正味電荷（点電荷とみなしたときに相当する電気量）の値。電気量の単位の (a.u.) は、電気素量を 1 としたときの単位である。

には生命現象を基本的な物理量と結びつけて今後考えられるようになって欲しい。

第5章 簡単な電気回路（マクロな系）

本章では、簡単な電気回路に関して学んでいく。ここで学習する内容は、物理学を系統的に学習する方法論からすれば、少しはずれる。現象として、数多くの荷電粒子が運動している現象（マクロな系の現象）を扱うのであるが、一つ一つの荷電粒子の運動に関しては考えず、荷電粒子が集団で運動する際の集団が示す性質を扱う。一つ一つの荷電粒子の運動から、集団の性質を基礎法則から導くのは、そう簡単ではないが、ある種の条件下では、一つ一つの粒子の振る舞いを考えなくても、集団の性質を理解することは可能である。例えば、電気回路では、スイッチをオンオフした時刻から非常に短い時間の中の現象は非常に複雑である一方、少し時間が経つと、ある種の安定した性質が観測され、非常に単純に取り扱うことが可能である。簡単な電気回路は物理学の分野に限らず、実験を行う際にしばしば作成しなければならないものであり、とりわけ生理学においては非常に重要な基礎的な知識でもある。読者においては、物理学というよりも、科学や技術の分野での常識として把握してもらいたい内容である。

5.1 電流

電流とは、荷電粒子の運動に伴う電荷の流れである。今、円柱状の線を考え、この円柱の断面積の面積を S とする。荷電粒子は円柱の断面に対して垂直に運動しているものとする。この面を時間 Δt の間に通過する電気量を ΔQ とするとき、この面 S を通過する電流の大きさ I を

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (5.1)$$

と定義する。

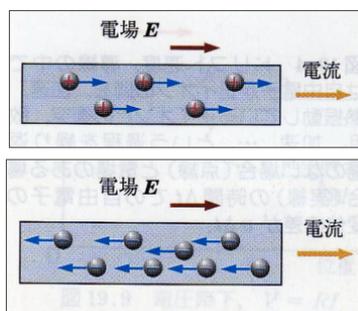


図 5.1: (上) 一様な電場が生じているとき、正電荷を帯びた物質が電場の向きに運動する様子を示したものの。(下) 一様な電場が生じているとき、負電荷を帯びた物質が電場と反対の向きに運動する様子を示したものの。

「電流とは荷電粒子の流れである」と始めに記述したが、実は**正電荷の移動の向きが電流の向きと定義されている**。このとき、電流の実体が負電荷であるならば、電流の向きは負電荷の移動の向きと逆であることになる。¹ 一方向で一様な電場が生じている場合、図 5.1 の上側に示したように、正電荷を帯びた物質は電場の方向を向いた力を受けて電場の方向に運動する。これに対して、負電荷を帯びた物質は、図 5.1 下側に示したように、電場の方向とは逆向きの力を受けて、その方向に運動する。しかし、どちらの場合にも、一方向で一様な電場が生じている場合には、電流は電場の方向と同じ方向に流れると定義されているのである。

このことをより明快に理解するために、次に導線を通る電流に関して具体的に考えておこう。

図 5.2 の上図は、単位体積当たりの自由電子数が n 個の金属で、断面積が S の一様な導線を示したものである。今、右向きに正の一様な電場がかかっているとしよう。また、電気素量 e ($e > 0$) を持つ正電荷が平均速度 v で移動しているとす。正電荷は電場から右側に力を受けるので、右向きに進んでいる。導線を円柱と考え、図の斜線を付けた二つの断面は、円柱の底面に相当する部分であり、二つの底面の間の距離は、1 秒間に正電荷が進む距離とする。この距離は、 $v \times 1$ 秒であるので、長さ

¹実際に、金属の線で構成される簡単な電気回路の場合、電流の実体は金属を構成している自由電子であることがわかっている。

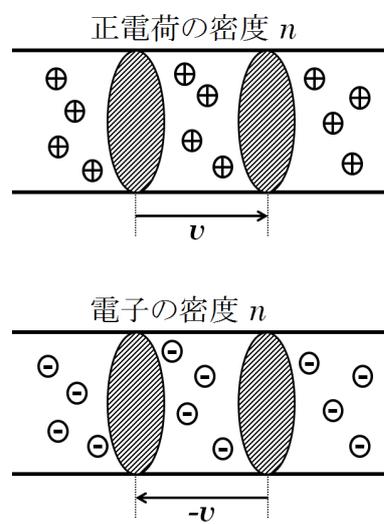


図 5.2: (上) 電流の定義を説明するために、導線の中で正電荷が右側に速度 v で動いている様子を示したもの。(下) 導線の中を負電荷が左側に速度 v で動いている様子を示したもの。

の次元を持つ値として v となる。すると、右側の底面を1秒間に通過した正電荷は、斜線を付けた二つの底面で構成される円柱の体積部分に存在することになる。今、正電荷の密度は n であるから、円柱部分に存在する正電荷の数は、 nvS 個である。即ち、1秒間（単位時間）に導線の断面積を通過する正電荷の数は nvS 個である。正電荷1個当たりの電気量は、 e であるから、電流の大きさの定義より、このとき電流の大きさ I は、 $envS$ である。ここで、右側に正の座標を考え、荷電粒子の速度をベクトルとして考えると、次の式が成立する。

$$I = envS \quad (5.2)$$

即ち、電流の向きはこのように定義されるのである。

次に、図5.2の下図を見てみよう。この図は、電気量 $-e$ ($e > 0$) (e は電気素量) の自由電子が、上図と同じ様な電場から力を受けて、上図で示した正電荷と反対向きで同じ大きさの平均速度 $-v$ で移動している状況を表したものである。ここで、式(5.2)において、電荷の e を $-e$ に置き換え、 v を $-v$ に置き換えても、電流自体のベクトル量は全く変わらないことがわかるであろう。即ち、電流の定義は、正電荷が電場と同じ方向に移動する向きが電流の向きと定義されているが、それは、負電荷が電場と反対向きに同じ大きさの速度で移動している場合と、電流の定義だけからでは区別がつかないのである。²

本節の最後に、電流の単位を示しておく。電流の単位は、一般的にアンペア [A] を使う。1A は、単位時間当たり 1C (クーロン) の電気量が移動するときの電流の強さ (大きさ) である。

問い 10A とは、図5.2で1秒間に断面積 S を通過した電気量がどのくらいの量であるか答えよ。

5.2 抵抗とオームの法則

電流が流れるのを妨げる作用を電気抵抗あるいは単に **抵抗** という。どのような導線にも抵抗はあるが、導線に比べて大きな抵抗を持つ回路の部品を抵抗器と呼ぶ。一般に、抵抗器はセラミックス、酸化物、あるいは合金のコイルなどから作られている。

²後に記述する、ホール効果の実験で、電流の実体が負電荷の流れであることは証明される。

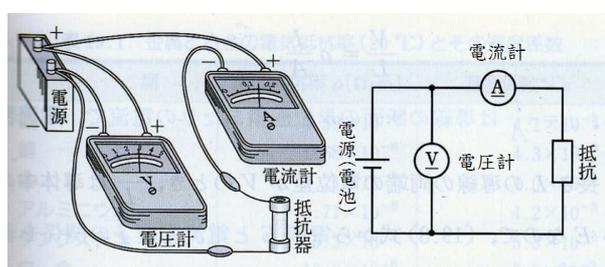


図 5.3: (左) 直流電源に抵抗器を付けた簡単な回路。(右) 左の簡単な電気回路の回路図。

図 5.3 の左図に示すように、抵抗器の両端に直流電源を接続し、抵抗器の温度が一定になるようにして電源の電圧 V を変化させると、抵抗器を流れる電流 I は、電圧に比例する。この比例関係をオームの法則という (19 世紀前半に発見)。この法則は、

$$V = RI \quad (5.3)$$

と表され、比例定数 R は電流が流れるのを正に妨げている値を表しているので、電気抵抗または抵抗という。抵抗の単位は、 $[V/A]$ であるが、一般には $[\Omega]$ と記述し、オームと呼ばれている。

オームの法則は、正にマクロな現象論的な法則で、金属と合金の場合に良く成り立っているが、常に本質的に成立しているものではないことに注意すること。それが証拠に、電解質溶液、ダイオード、放電管などでは成り立たない。最近、LED など日常生活でも目にするようになってきたダイオードでは、電流と電圧が比例しないばかりでなく、同じ電圧でも電圧をかける向きによって流れる電流の大きさは全く異なる。

5.3 抵抗と抵抗率

今、抵抗器の形状を円柱と考え、その両端の底面に当たる部分を回路に接続することを想定する。抵抗器は、電流が流れるのを妨げる (つまり電荷の流れを邪魔する) のであるから、その物質の長さが長くなれば抵抗の値も大きくなることは容易に想像される。また、抵抗器の断面積

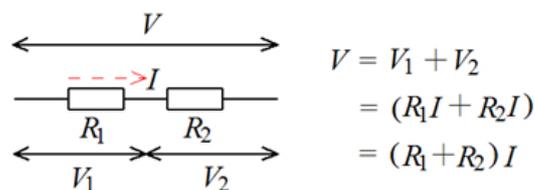


図 5.4: 抵抗の直列接続とその合成抵抗。

が大きくなれば、電流が流れる部分が増え、抵抗値は下がりそうであることも予想できる。導線は直線に延ばせば円柱と考えられる。抵抗器や導線の抵抗は、実際に、長さ L に比例し、その断面積 S に反比例する。従って、導線の抵抗 R は

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (5.4)$$

と記述することができる。ここで、 ρ は導線の材料と温度で決まる定数であり、(電気) 抵抗率という。また、 ρ の逆数を一般に σ と書いて、電気伝導率と呼ぶ。 σ は、その値が大きいほど電気を流しやすい。

5.4 抵抗の直列接続・並列接続

2つ以上の抵抗を接続して、それを1つの抵抗とみなすとき、その抵抗を**合成抵抗**という。2つの抵抗の接続は、**直列接続**と**並列接続**がある。

前々節のオームの法則及び前節の抵抗率における議論から、二つの抵抗を直列につなげば、その抵抗値はそれぞれの抵抗値の和となることが理解できるであろう。即ち、二つの抵抗 R_1 と R_2 が直列に接続されているとき、その合成抵抗 R は、

$$R = R_1 + R_2 \quad (5.5)$$

となる。図 5.4 は、抵抗の直列接続を示したものである。各抵抗における電圧降下の和が全体の電圧降下となる。

図 5.5 は、抵抗が並列接続しているとき、その合成抵抗の値がどうなるかを考えるために描いたものである。電流は電荷の流れなので、二つに

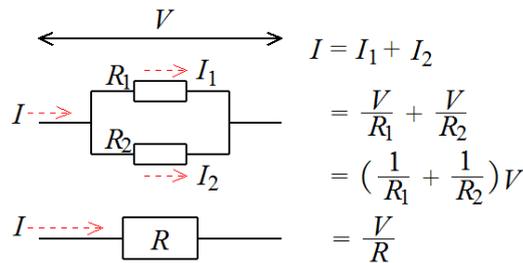


図 5.5: 抵抗の並列接続とその合成抵抗。

分かれる場合、別れる前の電流の値は別れたそれぞれの電流の和になる。それぞれの抵抗器はその両端の電圧が V であるから、それぞれの抵抗器に流れる電流はオームの法則から求めることができる。それをまとめると、並列接続した抵抗は、1つの抵抗の値として

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5.6)$$

となる。

5.5 電流と仕事（仕事率とジュール熱）

起電力 V の電池の負極から正極まで、電池の中で受ける電気力に逆らって ΔQ が移動するときに電池がする仕事（電池内部の何らかの機構が、クーロン力に基づく自然な電氣的な力に逆らう力を作りだし、その力がする仕事）は、電位の定義から、 ΔQV である。電流の定義を考えれば、 Δt 秒間に $I\Delta t$ の電気量が移動するので、電池のする仕事を電流を使って表すと $VI\Delta t$ ということになる。

また、単位時間当たりにする仕事のことを**仕事率**という。従って、起電力 V の電池において、負極から正極まで電池がする仕事率は VI ということになる。仕事率の単位は、一般に $[W]$ が使われ、ワットと呼ばれる。 $[W] = [J/s]$ である。

電池の内部で電池がした仕事は、電位差 V の回路を流れる電流 I が行う様々なタイプの仕事になる。このとき、電流の仕事率も、やはり VI で

ある。電流の仕事率を**電力**という。

次に、抵抗 R に起電力 V の電源を接続して、導線に電流 I が流れる場合を考えてみる。抵抗で単位時間あたりに発生する熱量³は、電流の仕事率 VI に等しい。従って、時間 t の間に抵抗で発生する熱量は、 VIt となる。ここで、電圧或いは電流にオームの法則をあてはめれば、

$$VIt = RI^2t = \frac{I^2}{R}t \quad (5.7)$$

となるので、電流によって発生する熱量は、電流あるいは起電力の2乗に比例する。この熱量のことを、**ジュール熱**と呼ぶ。

5.6 コンデンサー

5.7 コンデンサーと誘電体

5.8 コンデンサーの直列接続・並列接続

5.9 キルヒホッフの法則と簡単な直流回路

³熱力学の部で詳しく説明されるが（熱力学第1法則）、熱はエネルギーの存在形態の一つであり、同じ次元である。この場合、電源で高くなったエネルギーは抵抗で全て使われることになり（現実には導線でもエネルギーは消費されるが、簡単な電気回路を考える際には、導線は抵抗ゼロと仮定するので、そこでの発熱は無視する。）、そのエネルギーは最終的に抵抗で熱に変化する

第6章 簡単な電磁気現象

- 6.1 磁気に関するクーロンの法則と磁場
- 6.2 ビオサバールの法則（電流の作る磁場）
- 6.3 フレミングの左手の法則（電流が磁場から受ける力）
- 6.4 ローレンツ力（電荷が磁場から受ける力）

関連図書

- [1] J. C. Maxwell (1865), “ A Theory of the Electromagnetic Field ” ,
Phil.Trans.Roy.Soc.Lond. 155: 459-512, doi:10.1098/rstl.1865.0008
- [2] Zur Elektrodynamik bewegter Körper, A. Einstein, Annalen der
Physik (Germany), 17, 891-921 (1905).
- [3] Geiger, Hans (1908). ”On the Scattering of α -Particles by Matter”.
Proceedings of the Royal Society of London A 81 (546): 174-177.
Bibcode:1908RSPSA..81..174G. doi:10.1098/rspa.1908.0067
- [4] Geiger, Hans; Marsden, Ernest (1909). ”On a Diffuse Reflec-
tion of the α -Particles”. Proceedings of the Royal Society of
London A 82 (557): 495-500. Bibcode:1909RSPSA..82..495G.
doi:10.1098/rspa.1909.0054
- [5] Geiger, Hans (1910). ”The Scattering of the α -Particles by Matter”.
Proceedings of the Royal Society of London A 83 (565): 492-504.
Bibcode:1910RSPSA..83..492G. doi:10.1098/rspa.1910.0038
- [6]
- [7]
- [8]